

Az ABC háromszögben az $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 4$ arányok alapján γ derékszög, tegyük ennek alapján C -t a koordináta-rendszer origójába és A -t az x tengely $(b, 0)$ pontjába ($b > 0$). Ekkor B az y tengelyre jut, válasszuk helyzetének a $(0, a)$ pontot ($a > 0$), végül legyen $AB = 1$, azaz $a^2 + b^2 = 1$.

A beírt kör sugara, mint ismeretes:

$$\varrho = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(a + b - 1),$$

evvel K középpontja a (ϱ, ϱ) pont; az S súlypont pedig $\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Ennélfogva S akkor esik rá a K körüli sugárú kör kerületére, ha

$$\left(\frac{b}{3} - \varrho\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \varrho\right)^2 = KS^2 = \varrho^2,$$

és ϱ kiküszöbölésével

$$16 - 3(a + b + 1)^2 = 0,$$

amiből

$$(1) \quad a + b = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1.$$

Másrészt a feltételből $\alpha = 45^\circ/2$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, és ismert összefüggések alapján

$$(2) \quad a + b = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \cos 22,5^\circ = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Az (1) és (2) kifejezések nem lehetnek egyenlők. Ugyanis különbségüket az összegükkel szorozva, ami biztosan pozitív,

$$\frac{16}{3} - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

adódik, és ez nem 0, mert hasonlóan

$$\left[\frac{16}{3} - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \cdot \left[\frac{16}{3} + \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{256}{9} - \left(\frac{131}{6} + \frac{16}{\sqrt{6}}\right) = \frac{119}{18} - \frac{16}{\sqrt{6}}$$

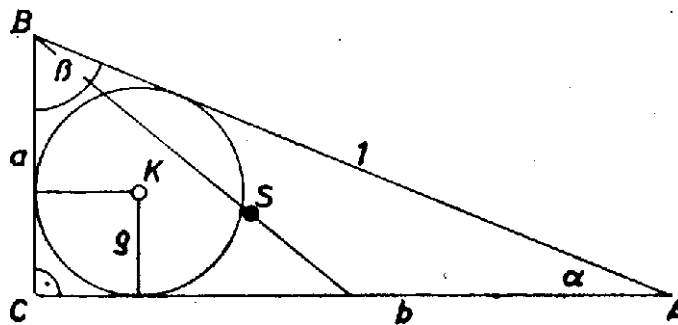
sem 0, különben ugyanis $\sqrt{6} = 16 \cdot 18/119$, racionális szám lenne.

Ezek szerint a szögek fenti aránya, és a beírt körnek a súlyponton való áthaladása ugyanazon derékszögű háromszögben nem teljesülhet, a kérdéses állítás nem igaz.

Megjegyzések. 1. Kérdezhetjük : mennyire „jár közel” egymáshoz a két feltétel? (1) és (2) egyenlősége egyenletet ad α -ra:

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} = 0,9259,$$

$\alpha = 22^\circ 48'$, vagyis kb. $0,3^\circ$ az eltérése $22,5^\circ$ -től.



2. A lapunk 32. kötetének (1966) 220. oldalán hirdetett pályázat összefüggést keresett a háromszög oldalai között, ha a súlypont rajta van a beírt kör kerületén. Ez: $6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2) = 0$, átrendezéssel: $3(a + b)^2 + 6(a + b)c - 8(a^2 + b^2) - 5c^2 = 0$, ebből is kiadódik az (1) egyenlet.