

$$(1) \quad f^2 - (x^4 - 2x)g^2 = 1.$$

Ha az f , g polinomokra teljesül (1), és F , G -re is teljesül

$$(2) \quad F^2 - (x^4 - 2x)G^2 = 1,$$

akkor (1) és (2) bal oldalainak a szorzata is 1-gyel egyenlő. Ez a szorzat a tényezőivel megegyező alakra hozható:

$$(3) \quad [f^2 - (x^4 - 2x)g^2] [F^2 - (x^4 - 2x)G^2] = [fF + (x^4 - 2x)gG]^2 - (x^4 - 2x)[fG + gF]^2.$$

Ennek alapján két – nem feltétlenül különböző – megoldásból előállíthatunk egy újabb megoldást:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi &= fF + (x^4 - 2x)gG, \\ \psi &= fG + gF, \end{aligned}$$

és ha f , g , F , G egész együtthatós polinomok voltak, az lesz a φ , ψ polinom is.

Triviális megoldása (1)-nek az $f = 1$, $g = 0$ polinompár, ha azonban e mellé a vele azonos $F = 1$, $G = 0$ párt vesszük, a (φ, ψ) pár is azonos lesz vele, így nem kapunk újabb megoldást.

Ha g valamilyen 0-tól különböző c egésszel volna egyenlő, $f^2(1) = 1 - c^2$ volna, így csak $c^2 = 1$ jöhetne szóba. Ekkor (1)-ből $f^2 = x^4 - 2x + 1$, ami nem polinom teljes négyzete (például $x = 2$ mellett sem az a helyettesítési értéke) g tehát legalább elsőfokú: $g(x) = c + dx$. Ekkor

$$f^2 = (x^4 - 2x)(c + dx)^2 + 1 = d^2x^6 + 2cdx^5 + c^2x^4 - 2d^2x^3 - 4cdx^2 - 2c^2x + 1,$$

tehát f csak $dx^3 + cx^2 \mp cx \pm f_1$, vagy ennek (-1) -szerese lehet. Ennek négyzetében x^4 együtthatója $c^2 \mp 2cd$, ami csak akkor lehet c^2 -tel egyenlő, ha $cd = 0$, tehát $c = 0$, hiszen $d = 0$ visszavezetne a már tárgyalt $g = c$ esetre. A $dx^3 \pm 1$ polinom négyzetében x^3 együtthatója $\pm 2d$, ami csak az $(x^3 - 1)$ választás mellett egyenlő $-2d^2$ -tel. Az

$$f = x^3 - 1, \quad g = x$$

polinomokból az $F = f$, $G = g$ választással a (4) szerint az

$$\begin{aligned} f_2 &= (x^3 - 1)^2 + x^2(x^4 - 2x), \\ g_2 &= 2x(x^3 - 1) \end{aligned}$$

megoldást kapjuk. Ebből az $F = f_2$, $G = g_2$ választással újabb f_3 , g_3 párt állíthatunk elő. Általában, ha valamilyen n természetes számra már meghatároztuk az f_n , g_n párt, azt az F , G helyére téve az

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= ff_n + (x^4 - 2x)gg_n, \\ g_{n+1} &= fg_n + gf_n \end{aligned}$$

párt kapjuk. Ha f_n $3n$ -ed fokú, g_n $(3n - 2)$ -ed fokú, és mindkettőben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, e tulajdonságok öröklődnek az f_{n+1} , g_{n+1} párra. Mivel például az f_2 , g_2 párnak megvannak a mondott tulajdonságai, e tulajdonságok öröklődnek az egész sorozatra, tehát a sorozat elemei különbözőek. A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A (3) azonosság alapja az, hogy az

$$f + g\sqrt{x^4 - 2x}$$

alakú függvények köréből a szorzás nem vezet ki. Ha ugyanis ezt a polinomot az

$$F + G\sqrt{x^4 - 2x}$$

függvénnyel szorozzuk, épp a

$$\varphi + \psi\sqrt{x^4 - 2x}$$

függvényt kapjuk, ahol φ , ψ a (4) alatti polinomok.

A megoldók többsége csak azt vette észre, hogy (1)-ből négyzetreemeléssel megoldást állíthatunk elő, így az f_n , g_n sorozatnak csak az $n = 2^k$ indexekhez tartozó elemeit adta meg. Persze a feladat állításának igazolásához ez is elegendő volt. Belátható, hogy (-1) -gyel való szorzástól eltekintve mi előállítottuk az összes megoldást.