

Megoldás. Ismeretes, hogy ilyen mozgást végző test út–idő függvénye másodfokú polinom a szokásos jelölésekkel $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$. A kérdés tehát az, hogy másodfokú polinom helyettesítési értékeivel mennyire tudjuk megközelíteni a táblázat adatait.

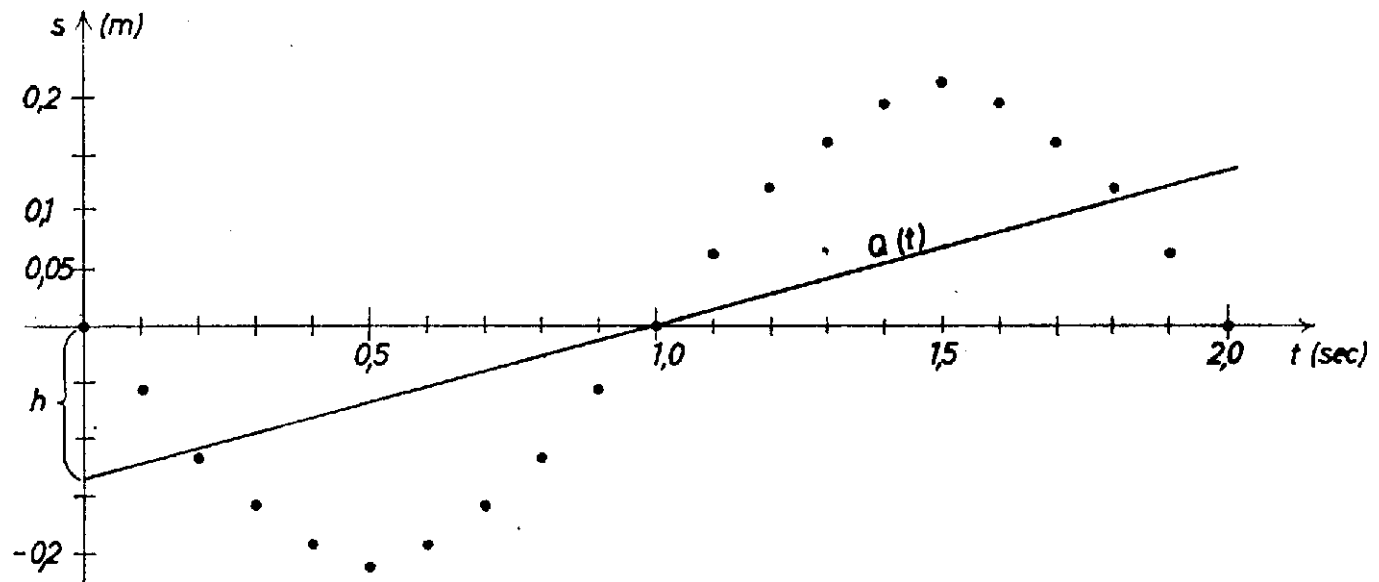
Ha a táblázat út–adataiból kivonjuk egy tetszőleges $P(t)$ másodfokú polinom értékeit, a kapott új táblázat adatait ugyanannyira lehet megközelíteni egy $Q(t)$ polinommal, mint az eredetit a $P(t) + Q(t)$ -vel.

Olyan $P(t)$ polinomot szeretnénk találni, amelyet a táblázat értékeiből kivonva, a kapott új táblázat „szebb” lesz, könnyebben felismerhető lesz a jól közelítő $Q(t)$ polinom. Táblázatunkat nézegetve észrevehető, hogy a 2,0 s-hoz tartozó adat az 1,0 s-hoz tartozó 2-szeresénél 1-gyel nagyobb,

idő (s)	út (m)	idő (s)	út (m)	idő (s)	út (m)
0,0	0,0000	0,7	-0,1639	1,4	0,1922
0,1	-0,0627	0,8	-0,1196	1,5	0,2015
0,2	-0,1194	0,9	-0,0623	1,6	0,1928
0,3	-0,1641	1,0	-0,0000	1,7	0,1641
0,4	-0,1928	1,1	0,0623	1,8	0,1194
0,5	-0,2025	1,2	0,1196	1,9	0,0627
0,6	-0,1932	1,3	0,1639	2,0	0,0000

az idő négyzetének felét levonva belőlük, éppen 2-szerese lesz annak (0,637, ill. 1,274). Vonjuk le ezért a táblázatból a $P(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0,637 t$ polinomot. A kapott különbségeket az új táblázat tartalmazza, ábrázoljuk is a pontokat koordináta-rendszerben. A kapott pontrendszer lényegében szimmetrikus az (1;0) pontra (2 – 2 pontnál van 0,001 eltérés), ezért jól közelíthető egy, a szimmetriaközépponton áthaladó egyenessel. Az egyenes iránytangensét úgy határozzuk meg, hogy a (0;0) és a (0,6; -0,1932) pontokban azonos legyen a hiba (könnyen belátható, hogy ezen két pont esetén adódik a hiba a legnagyobbak). A hibát h -val jelölve, hasonló háromszögekből felírható, hogy

$$\frac{0,1932 - h}{h} = \frac{0,4}{1},$$



amiből $h = 0,138$ adódik. Tehát az egyenes egyenlete $Q(t) = 0,138 t - 0,138$, a mozgást közelítően leíró függvény $s^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0,775 t - 0,138$ és a hiba minden pontban kisebb, mint 0,138.

Alsó becslést kapunk a hibára, ha csak a $t_1 = 0$; $t_2 = 0,6$; $t_3 = 1,4$ és $t_4 = 2,0$ abszcisszájú pontokhoz akarunk legjobban közelítő $f(t) = at^2 + bt + c$ másodfokú függvényt találni. Ezen t_1, t_2, t_3, t_4 számokhoz (és általában tetszőleges ilyen szám-négyeshez) meghatározhatók a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ számok úgy, hogy teljesüljenek a

$$(1) \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i t_i^n = 0, \quad n = 0, 1, 2$$

egyenlőségek. Ez három egyenlet a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ismeretlenekre. Bebizonyítható, hogy az egyenletrendszernek mindig van (végtelen sok) megoldása. Esetünkben $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -2$ egy megoldás (a számolást nem részletezzük). Jelöljük s_i -vel a t_i -ben mért értéket, és legyen $\Delta_i = s_i - f(t_i)$, a t_i helyen a közelítés hibája. Ekkor

$$(2) \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i \Delta_i = \sum_{i=1}^4 \lambda_i (s_i - at_i^2 - bt_i - c) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i s_i - a \sum_{i=1}^4 \lambda_i t_i^2 - b \sum_{i=1}^4 \lambda_i t_i - c \sum_{i=1}^4 \lambda_i.$$

(2)-ben az utolsó egyenlőség jobb oldalán álló 3 kivonandó tag (1) szerint 0, tehát

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i \Delta_i = \sum_{i=1}^4 \lambda_i s_i.$$

Mindkét oldal abszolút értékét véve, és felhasználva, hogy az összeg abszolút értéke nem nagyobb a tagok abszolút értékeinek összegénél,

$$\left| \sum_{i=1}^4 \lambda_i s_i \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \lambda_i \Delta_i \right| \leq \sum_{i=1}^4 |\lambda_i| \cdot |\Delta_i| \leq \left(\max_{i=1, \dots, 4} |\Delta_i| \right) \cdot \sum_{i=1}^4 |\lambda_i|,$$

amiből kapjuk, hogy

$$(3) \quad \max_{i=1, \dots, 4} |\Delta_i| \geq \frac{\left| \sum_{i=1}^4 \lambda_i s_i \right|}{\sum_{i=1}^4 |\lambda_i|}.$$

A (3) képletet a kiválasztott pontnégyesre és a már meghatározott λ_i -kre alkalmazva nyerjük, hogy

$$\max_{i=1, \dots, 4} |\Delta_i| \geq 0,1376.$$

Nyilvánvaló, hogy a teljes pontrendszert közelítő parabola hibája ennél csak nagyobb lehet. Viszont 0,138 hibával közelítő parabolát már találtunk, tehát kimondhatjuk, hogy az út mérési hibája legalább 0,138 egység. (Nincs értelme a 0,1376-hoz keresni parabolát – habár találnánk ilyen –, hiszen az eredeti adatok is csak 3 tizedes pontosságúak voltak.)