

Bergengóciában 3^4 különbözőképpen kitöltött TOTÓ-szelvény van. Egy adott héten nemcsak egy szelvényen lehet legalább 3 találat, hiszen az egyetlen 4 találatoson kívül azon a 8 szelvényen is legalább 3 találat van, amelyet a telitalálatos szelvényből úgy kapunk, hogy valamelyik tippjét elrontjuk. Megfordítva, egyetlen szelvényt 9 különböző eredmény mellett lehet legalább 3 találatunk. Így ahhoz, hogy az összes 3^4 lehetséges esetet lefedjük, legalább $3^4 : 3^2 = 3^2$ szelvényt kell kitöltenünk. Megfelel a célnak például a következő táblázatban látható 9 szelvény.

1	1	1	x	x	x	2	2	2
1	x	2	1	x	2	1	x	2
2	1	x	1	x	2	x	2	1
x	1	2	2	x	1	1	2	x

Burkusföldön 3^{11} különböző kitöltés van, és egy adott szelvényt

$$1 + \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{11}{2} 2^2 = 3^5$$

különböző esetben lehet legalább 9 találatunk. Egy esetben ugyanis 11 találatunk van. Huszonkét esetben csak egy eredményt nem találtunk el, amikor a 11 sor valamelyikében a tippünktől eltérő két másik lehetséges eredmény valamelyike következett be. Amikor csak 9 találatunk van, a két el nem talált eredmény közül az első sorát 11-féleképpen, a másodikét 10-féleképpen választhatjuk meg. Így azonban minden sorpárt kétszer kapunk meg, a különböző esetek száma tehát csak $11 \cdot 10/2 = \binom{11}{2}$. Minden sorpár mellett a mienktől eltérő eredmény $2 \cdot 2$ -féleképpen választható meg, így a lehetőségek számára valóban azt kapjuk, amit állítottunk.

Mivel egy szelvényt 3^5 különböző esetben lehet legalább 9 találatunk, az összes eset lefogatásához legalább $3^{11} : 3^5 = 3^6$ szelvényt kell kitöltenünk.

Megjegyzés. Burkusföldön nem adtunk példát megfelelő tipp-rendszerre. Tulajdonképpen Bergengóciában sem kellett volna adnunk, a feladat csak egy-egy alsó becslést kért. Látható, hogy a bergengóc példa úgy készült, hogy benne az első két sor tetszőleges, a harmadik sor ezek „összege”, ha képzeletben x helyére 0-t írunk, és a 3-nál nagyobb eredményt 3-mal csökkentjük. A negyedik sor hasonlóan az első kettő különbsége, csak most a negatív eredményt kell 3-mal megnövelnünk. Ennek mintájára próbálható meg a 3^6 burkus szelvény előállítása is. Most az első hat sor legyen szabad, és a többi öt ezek alkalmas függvénye. Ha az i -edik tippet t_i -vel jelöljük, és most is csak a 3-mal való osztás maradéka a fontos, akkor egy alkalmas „ellenőr” függvényrendszer a következő:

$$t_7 = t_2 + t_3 - t_4 - t_5 + t_6$$

$$t_8 = t_1 - t_3 + t_4 - t_5 + t_6$$

$$t_9 = t_1 - t_2 - t_4 + t_5 + t_6$$

$$t_{10} = -t_1 + t_2 - t_3 + t_5 + t_6$$

$$t_{11} = -t_1 - t_2 + t_3 + t_4 + t_6$$

Magyar Zoltán