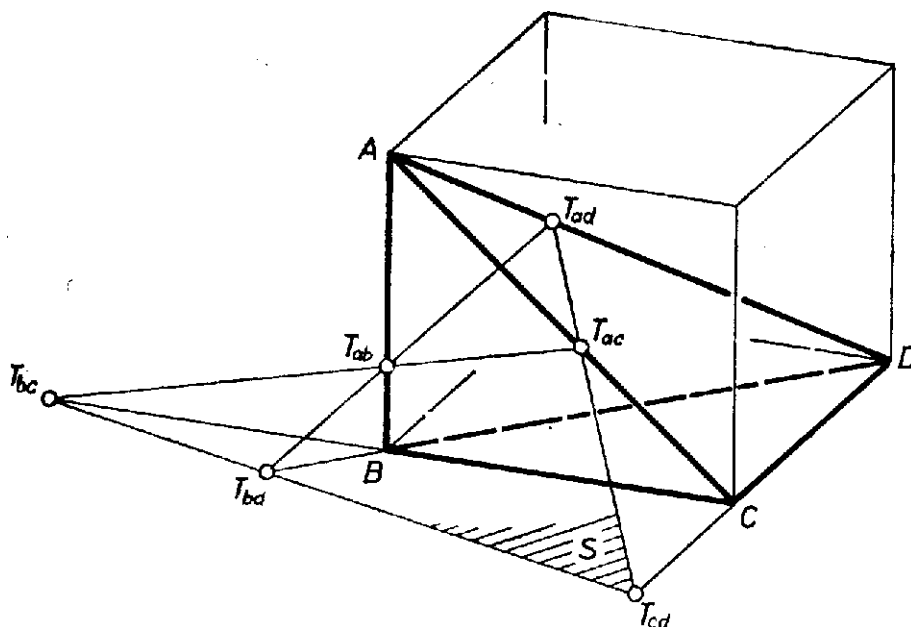


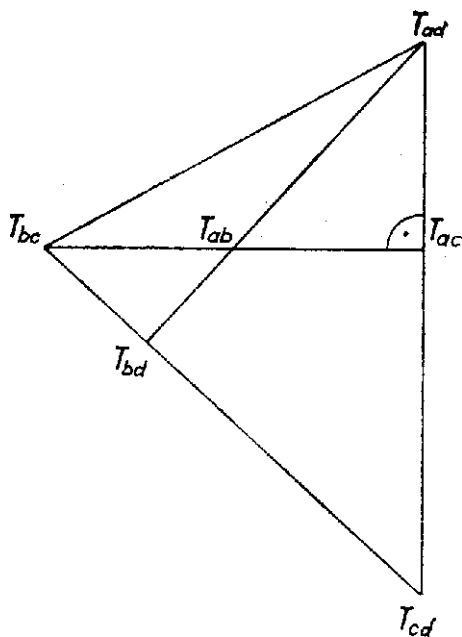
A metsző S síkkal szemben támasztott követelmény teljesíthető, elég, ha S nem megy át a tetraédernek egyik csúcán sem. Jelöljük S -nek az XY éllel való metszéspontját T_{xy} -nal és fussa be X és Y egymástól különbözően az A, B, C, D csúcsokat (1. ábra).



Triviálisan igaz az állítás, ha a T_{xy} metszéspontok közt van olyan 3, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai, hiszen ebben a magasságpont maga a derékszög csúcsa, és ezt az egybeesést a feladat nem zárja ki. Megmutatjuk, hogy a $T_{ac}T_{ab}T_{ad}$ háromszögben T_{ac} -nél derékszög van.

Valóban, az ACD sík merőleges a téglatest révén az ACB síkra, a fölvetel révén S -re, tehát az ACD sík merőleges e két sík közös egyenesére, amin pedig rajta van T_{ac} és T_{ab} . Így a $T_{ac}T_{ab}$ egyenesre merőlegesen áll az ACD síknak minden egyenese, az S -sel való $T_{ac}T_{ad}$ metszészvonala is; ezzel bebizonyítottuk állításunkat. (Sőt többet kaptunk: a derékszög csúcsát tovább megtartva, T_{ad} helyett írhatjuk T_{cd} -t, valamint ettől függetlenül T_{ab} helyett T_{bc} -t, tehát H -ból $2 \cdot 2 = 4$ olyan derékszögű háromszög is kiválasztható, melyben a derékszög csúcsa T_{ac} .)

Megjegyzések. 1. Könnyű a fentiek alapján belátni, hogy teljesíthető a feladat követelménye a H -ból vett nem derékszögű háromszöggel is. Az A, B, C, D betű helyére rendre D -t, C -t, B -t, A -t írva, S megválasztása is, föltevésünk is érvényesek maradnak, és eredményünket most így mondjuk ki: a T_{db} pontban a $T_{da}T_{ba}$ és $T_{dc}T_{cb}$ egyenesek merőlegesen metszik egymást (2. ábra, T_{yx} természetesen azonos T_{xy} -nal).



Ez pedig az előbbivel együtt azt jelenti, hogy a $T_{ad}T_{bc}T_{cd}$ háromszög magasságpontja (amit már két magasságvonal meghatároz) a T_{ab} pont. Ez igazolja újabb állításunkat. – És mivel ismert tény, hogy egy nem derékszögű háromszög

bármelyik csúcsa helyére a magasságpontot cserélve, az új háromszög magasságpontja azonos a kicserélt csúccsal, azt látjuk, hogy T_{ab} , T_{bc} , T_{cd} és T_{da} közül bármelyik három pont megfelelő háromszöget alkot.

2. Nem használtuk fel, hogy AB , BC , CD hossza különböző; ez a feltétel csak a jelölés kényelmes kialakítása kedvéért került a feladat szövegébe.