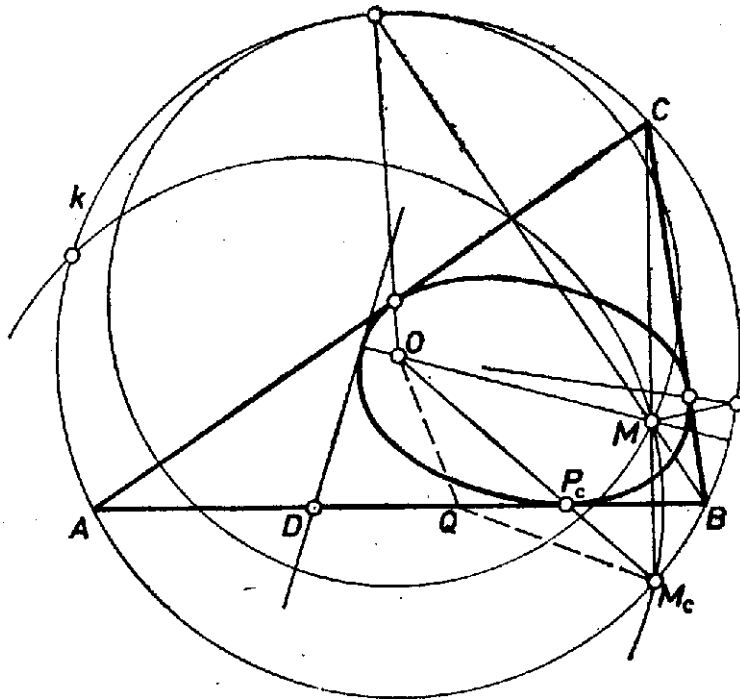


Mivel a háromszög hegyesszögű, mind O , mind M a háromszög belsejében van.

Tudjuk, hogy a háromszög magasságpontját bármely oldalára tükrözzük, a tükörkép rajta lesz a háromszög köré írható körön. Tükrözzük M -et AB -re, jelöljük tükörképét M_c -vel, az M_cO szakasznak AB -vel közös pontját P_c -vel (mivel a háromszög hegyesszögű, van ilyen pont). A tükrözés miatt $MP_c = M_cP_c$, $OP_c + P_cM = OP_c + P_cM_c = OM_c = r$ az ellipszis nagytengelye, azaz P_c rajta van az O, M fókuszú $OM_c = r$ hosszúságú nagytengelyű ellipszisen.



Belátjuk, hogy az AB egyenesnek több ilyen tulajdonságú pontja nincs. Legyen Q tetszőleges, AB -re illeszkedő, P_c -től különböző pont. Mivel M_c az M tükörképe AB -re, ezért $M_cQ = MQ$, így $OQ + QM = OQ + QM_c$. Tekintsük az OM_cQ háromszöget! A háromszög-egyenlőtlenség miatt $OQ + QM_c > OM_c = r$, így Q nem pontja az ellipszisnek. Mivel P_c belső pontja AB -nek, ezért AB szakasznak egyetlen közös pontja van az ellipszissel, így azt is mondhatjuk, hogy AB érintő. Az AB tetszőleges oldala volt a háromszögnek, ezért az állítást mindhárom oldalra beláttuk.

Megjegyzések. 1. A látott tulajdonság alapján szinte nyilvánvaló, hogy a tekintetbe vett ellipszis adja azon körök középpontjának mértani helyét, amelyek átmennek az (ABC) háromszög köré írt k körben levő M ponton és (belülről) érintik k -t. Az ellipszisnek ilyen felfogása alkalmat ad számos szerkesztésre. Itt az O és M fókuszok egyenrangúsága nem érvényesül, ezért szokás más neveket használni: a k kör az ún. ellenkör (sugara a nagytengely), O az ellenkör középpontja és M „a” fókusz. (Természetesen lehetne M körül is felvenni ellenkört, a két ellenkör egyidejű felhasználása viszont nem ígér előnyt.)

Csak egy efféle szerkesztési példát említünk (elfogadva a fentiekből, hogy az AB egyenes az ellipszisnek P_c -beli érintőjével azonos): húzzuk meg az érintőket az ellipszishez az AB egyenes tetszőleges (A -tól, B -től és P_c -től különböző) D pontjából. A fentiekből $DM_c = DM$, tehát a D körüli M -en (a fókuszon) átmenő kör az ellenkörből kimetszi a (P_c) érintési pontot tartalmazó OM_c ellenköri sugár M_c végpontját, így a keresett (egyik) érintő az MM_c szakasz felező merőlegese. – Az olvasóra hagyjuk annak vizsgálatát, milyen helyzetű D -hez adódik 2, ill. 1 érintő, és hogy milyen D -hez nem kapunk M_c -t, érintőt.

Az érdeklődőknek ajánljuk a következő szakköri füzetet: Schopp János: Kúpszeletek (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.)

3. Az eddigieket folytatva, eredeti feladatunk egyértelmű a következő tétellel: az ellipszis bármely érintője 2 pontban metszi az ellenkört (fent A és B). Megrajzolva e pontokból az ellipszis második érintőt, ezek (C) metszéspontja rajta van az ellenkörön. (Szokásos kifejezéssel: a három érintő *záródik*, az eljárást folytatva további új érintőt nem kapunk.) Ez a tétel *Schopp* Jánostól (Budapest) származik.