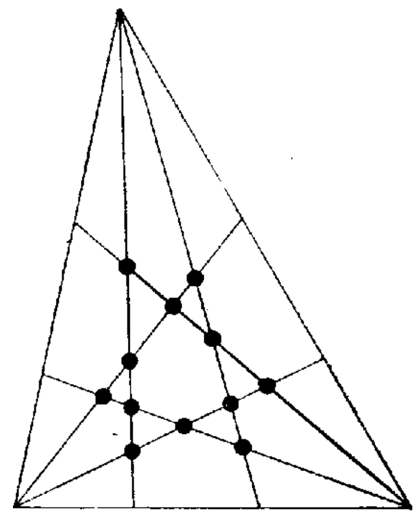
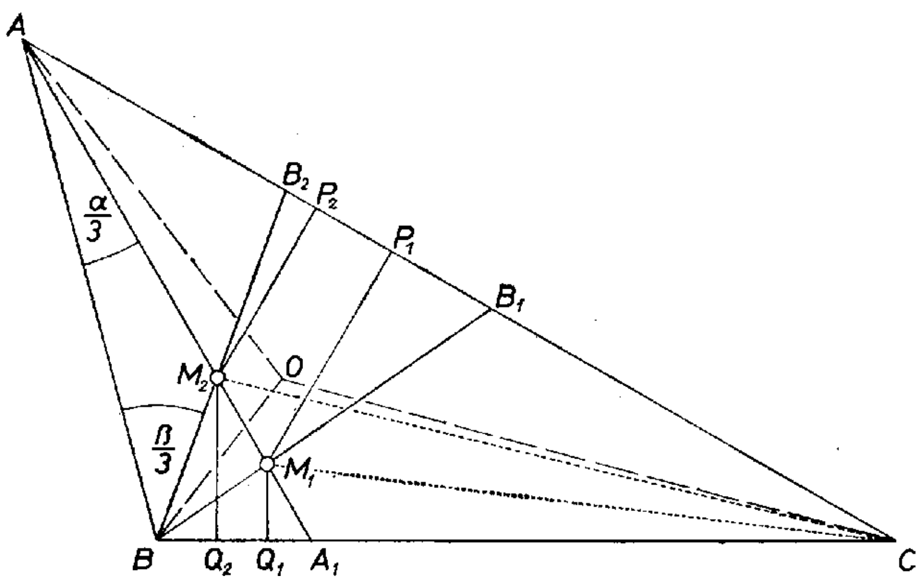
Bármelyik tekintett harmadoló egyenes a háromszög belsejében metszi a másik két csúcsból induló két-két harmadolót. Így egy kiszemelt csúcsból induló két harmadolón $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ metszéspontot találunk – hacsak ezek mind különbözők. Mind a három csúcsból külön-külön kiindulva, így $3 \cdot 8$ metszéspontot számlálunk, de ezzel mindegyiket 2-szer vettük tekintetbe, tehát a pontok száma legfeljebb 12.



Bebizonyítjuk, hogy minden háromszögben létre is jön ez a 12 metszéspont. Elég ehhez tekinteni az ABC háromszög AA_1 szögharmadolójából ($CAA_1\sphericalangle = 2 \cdot BAA_1\sphericalangle$) a BB_1 és BB_2 harmadolókkal ($ABB_1\sphericalangle = 2 \cdot CBB_1\sphericalangle$, $CBB_2\sphericalangle = 2 \cdot ABB_2\sphericalangle$) kimetszett M_1, M_2 metszéspontokat, és megmutatni, hogy sem M_1C, sem M_2C nem harmadolja az ACB szöget hiszen a csúcsok kellő átbetűzésével ez a bizonyítás minden metszéspontra átvihető.



Jelöljük az ABM_i háromszög köré írt kör átmérőjét d_i-vel, M_i-nek AC-n, BC-n levő vetületét P_i-vel, Q_i-vel ($i = 1,\, 2$). Ekkor

$$\frac{M_1P_1}{M_1Q_1} = \frac{AM_1 \sin\dfrac{2\alpha}{3}}{BM_1 \sin\dfrac{\beta}{3}} = \frac{d_1 \sin\dfrac{2\beta}{3} \sin\dfrac{2\alpha}{3}}{d_1 \sin\dfrac{\alpha}{3} \sin\dfrac{\beta}{3}} = 4\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\beta}{3}.$$

Ha M_1C harmadolná a C-nél levő γ szöget, ez csak úgy lehetne, hogy $ACM_1\sphericalangle = 2 \cdot BCM_1\sphericalangle$ mert – a szögfelezők közös pontját O-val jelölve – M_1 az OBC háromszögben van, hiszen AA_1 a BAO, BB_1 pedig a CBO szögtartományban halad. Feltéve tehát, hogy $BCM_1\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{3}$,

$$\frac{M_1P_1}{M_1Q_1} = \frac{CM_1 \sin\dfrac{2\gamma}{3}}{CM_1 \sin\dfrac{\gamma}{3}} = 2\cos\frac{\gamma}{3} = 4\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\beta}{3}$$

lenne, vagyis

$$\cos\frac{\gamma}{3} = 2\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\beta}{3}. \tag{1}$$

Ez azonban nem állhat fenn, a jobb oldal mindig nagyobb a bal oldalnál, ugyanis így alakítható:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{3}+\cos\frac{\alpha+\beta}{3} = \cos\frac{\alpha-\beta}{3} + \cos\left(60^\circ - \frac{\gamma}{3}\right) =$$
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{\gamma}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\gamma}{3} =$$
$$\cos\frac{\gamma}{3} + \left[\cos\frac{\alpha-\beta}{3} - \cos\left(60^\circ + \frac{\gamma}{3}\right)\right],$$

és itt a nagy zárójel pozitív, hiszen a cosinusfüggvény a $(0^\circ, 180^\circ)$ intervallumban szigorúan monoton fogyó és

$$0^\circ \leqq \left|\frac{\alpha-\beta}{3}\right| < 60^\circ < 60^\circ + \frac{\gamma}{3} < 180^\circ.$$

Hasonló számítással

$$\frac{M_2P_2}{M_2Q_2} = \frac{\sin\frac{\beta}{3}\sin\frac{2\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{2\beta}{3}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\beta}{3}},$$

és ennek – ha M_2C harmadolná γ-t – ismét vagy $2\cos\frac{\gamma}{3}$-mal vagy ennek reciprokával kellene egyenlőnek lennie – és mindkét föltevés alkalmas átbetűzéssel (1)-re vezetne.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.