

Mivel $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$,

$$P(x) = \frac{b}{\sqrt{2}} \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + a - \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Itt az első tag nem negatív, és lehet 0 is, például $x = -\frac{\pi}{4}$ mellett, tehát $P(x)$ akkor és csakis akkor lesz nem negatív minden x -re, ha $a - \frac{b}{\sqrt{2}} \geq 0$, ami $b > 0$ mellett ekvivalens az

$$(1) \quad \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

feltétellel.

Jelöljük az $\frac{a}{b}$ hányados értékét c -vel. Mivel $\frac{b+a}{b-a} = \frac{1+c}{1-c}$ és feltevésünk szerint $\frac{a}{b} < 1$, (1) alapján azt kell megvizsgálnunk, mi a

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$$

szakaszon értelmezett

$$Q(c) = \frac{1+c}{1-c} = \frac{2}{1-c} - 1$$

függvény értékkészlete. Ha c befutja a (2) szakaszt, $1-c$ a

$$0 < 1-c \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

szakaszt járja be, reciproka pedig az $1 / \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 + \sqrt{2}$ -nél nem kisebb számokat. Tehát $Q(c)$ értékkészlete és így a $\frac{b+a}{b-a}$ hányados lehetséges értékeinek a halmaza is a $(3 + 2\sqrt{2})$ -nél nem kisebb számokból áll.

Tóth Csaba (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)