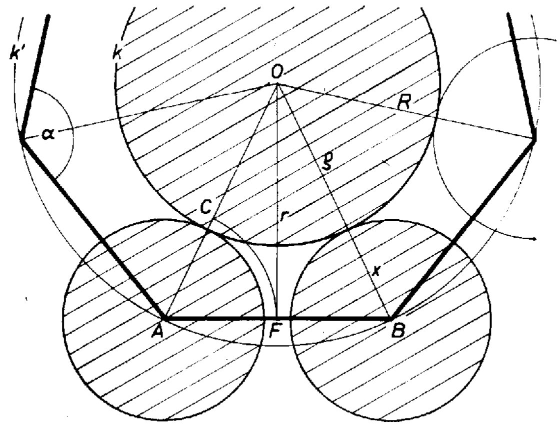
(1) $$R-\frac{a}{2} \leq \varrho \leq r,$$

1. Legyen a szabályos n-szög középpontja O, egy oldala AB, ennek felezőpontja F, és mérjük fel A-tól O felé az $AC=AF$ hosszúságot (1. ábra).



1. ábra

A háromszög–egyenlőtlenség alapján az OAF derékszögű háromszögből

$$OC=OA-AF<OF, \qquad R-\frac{a}{2}<r,$$

eszerint ϱ-nak (1)-beli korlátai valóban egy intervallumot engednek meg ϱ megválasztására. Az O körül irandó k körnek vagy át kell mennie C-n vagy magába kell zárnia C-t; viszont $\varrho \leq r$ miatt F legföljebb k kerületéhez tartozhat hozzá, így k egész belseje részt vesz a vizsgálandó lefedésben.

Az n szög csúcsai körül irandó n számú kör mindegyikének sugara $R-\varrho$, jelöljük ezt x-szel, és jellemezzük ezzel a lefedést, tehát $\varrho=R-x$. (1)-et (-1)-gyel szorozva és mind a három részéhez R-et hozzáadva teljesülnie kell az

(2) $$\frac{a}{2} \geqq R-\varrho=x \geqq R-r$$

kettős egyenlőtlenségnek. Az első rész szerint bármelyik két ilyen kör nem nyúlhat egymásba, hiszen két középpont távolsága legalább akkora, mint $AB=a$, ami legalább akkora, mint $2x$.

Az x sugarú körök a szabályos n-szög területéből egy–egy α nyílásszögű körcikket fednek le, ahol α a szabályos n szög egy szöge, ívmértékben

$$\frac{(n-2)\pi}{n}=\pi-\frac{2\pi}{n}.$$

Így a lefedett terület

$$T=\pi(R-x)^2+n\,\frac{x^2}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right),$$

és ennek ugyanazon x (és megfelelő ϱ) mellett van maximuma, illetve minimuma, mint a (2) tartományban értelmezett

$$\frac{2T}{n\pi}=f(x)=x^2-\frac{4R}{n}x+\frac{2R^2}{n}=\left(x-\frac{2R}{n}\right)^2+\frac{2(n-2)R^2}{n^2}$$

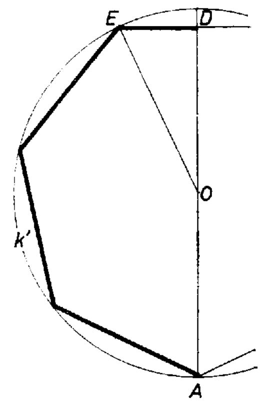
függvénynek.

$f(x)$-et minden x-re értelmezett függvénynek tekintve (rögzített n mellett) minimuma van az

$$x_0=\frac{2R}{n}$$

helyen, és a minimum értéke az állandó tag, pozitív.

2. Megmutatjuk, hogy x_0 benne van a (2) intervallumban, tehát feladatunk *b)* részére a válasz éppen x_0. Az $\frac{a}{2} \geqq x_0$ egyenlőtlenség ekvivalens evvel: $\frac{n}{2} \cdot a \geqq 2R$, vagyis, hogy a szabályos n-szög ($n \geqq 3$) kerületének a fele nagyobb az átmérőnél. Páros n esetén ez szinte nyilvánvaló: a kerület felét megadja $\frac{n}{2}$ számú, egymás után csatlakozó oldalból álló töröttvonal, és az ennek végpontjait összekötő átló hossza éppen az átmérő. Páratlan n esetén a kerület felét egy A csúcstól a szemben levő oldal D felezőpontjáig haladva tesszük meg (bármelyik irányban), és akkor az AD egyenes mint szimmetriatengely átmegy O-n (2. ábra).



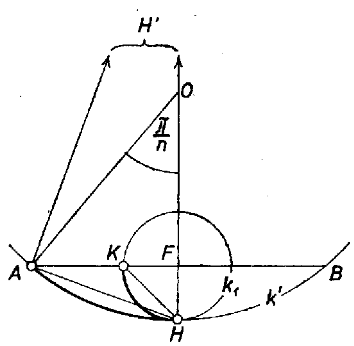
2. ábra

Az egyik $A \dots D$ félkerületet két részre osztjuk a D-vel megfelezett oldal E végpontjával. Az AE útrész vetülete a tengelyre $AD = AO + OD$ (hiszen O a sokszögnek belső pontja). A vetület nem nagyobb, mint az eredeti útrész, ezért

$$\frac{n}{2}\,a = A \dots E + ED > AO + (OD + ED) > R + OE = 2R,$$

ezt akartuk bizonyítani. (Egyenlőség semmilyen n-re nem teljesülhet.)

(2)-ből az $x_0 \geqq R - r$ rész belátásához tekintsük az F pont körül azt a k_1 kört, amely érinti a sokszögünk köré írt k' kört, nyilvánvalóan az AB ív H felezőpontjában (1. és 3. ábra).



3. ábra

Az FA félegyenest k_1 az F és A közti K pontban metszi, mert

$$KF + FO = HF + FO = HO = AO < AF + FO,$$

tehát $KF < AF$, és így $KH < AH$. Fogadjuk el ebből bizonyítás nélkül, hogy k'-nek AH húrhoz tartozó íve hosszabb, mint k_1-nek a KH húrhoz tartozó negyedköríve:

$$\widehat{AH} > \widehat{KH}, \text{ azaz } \quad R\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{2}\,FH = \frac{\pi}{2}(OH - OF) = \frac{\pi}{2}(R - r).$$

Ebből $2/\pi$-vel való szorzás útján adódik a kívánt egyenlőtlenség:

$$\frac{2R}{n} = x_0 > R - r.$$

Az eddigiek szerint a sokszög területéből a megrajzolt $(1 + n)$ kör által lefedett rész minimális, ha a sokszög n csúcsa körül leírt körök sugara x_0, egyenlő a k' kör átmérőjének n-ed részével. A sugár szerkesztése nyilvánvaló, és ezzel ϱ is kiadódik.

3. Azt is láttuk, hogy x_0 a (2)-beli korlátok egyikével sem egyenlő. Legyen az alsó korlát $R - r = x_1$, a felső korlát $a/2 = x_2$. Így $f(x)$ az x_0-tól x_1 felé haladva is, x_2 felé haladva is növekszik és a másodfokú függvény grafikonjának szemléletére támaszkodva mondhatjuk, hogy legnagyobb elért értéke az első esetben $f(x_1)$, a másodikban $f(x_2)$. Eszerint f-nek az $(x_1,\, x_2)$ intervallumon elért maximuma e két érték nagyobbika. Mármost

$$f(x_2) - (fx_1) = (x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2,$$

és ez aszerint pozitív, negatív vagy 0, hogy $|x_2 - x_0| = x_2 - x_0$ és $|x_1 - x_0| = = x_0 - x_1$ közül az első, illetve a második a nagyobb, illetve ha éppen egyenlők.

Megmutatjuk, hogy $n = 3$ esetén az $f(x_2)$-ből adódó $T = \frac{n\pi}{2} f(x_2)$ a maximum, $n = 4$ esetén $f(x_1) = f(x_2)$, vagyis

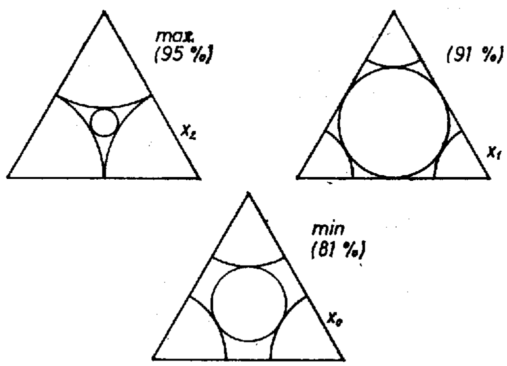
$$x_1 = R - \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \varrho_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{a}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \varrho_1,$$

és $\varrho_2 = R - x_2 = x_1$ mellett egyaránt maximumot kapunk, $n \geqq 5$ mellett pedig $f(x_1)$ vezet a maximumra. Valóban, $n = 3$ esetén $a = R\sqrt{3}$, $r = R/2$, így

$$x_0 - x_1 = \frac{2R}{3} - \left(R - \frac{R}{2}\right) = \frac{R}{6},$$

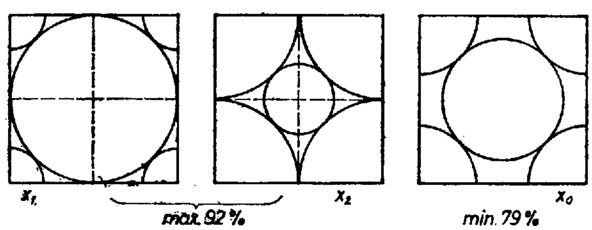
$$x_2 - x_0 = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{2R}{3} = \frac{R}{6}(\sqrt{27} - 4) > \frac{R}{6}(5 - 4) = x_0 - x_1.$$

A legnagyobb lefedését tehát úgy kapjuk az a oldalú szabályos háromszögnek, ha a csúcsai körül $a/2$ sugarú köröket írunk, középpontja körül pedig azt a k-t, amely e három kört érinti (4. ábra első háromszöge, a második ábra $f(x_1)$-et, a harmadik a minimális fedést mutatja).



4. ábra

Az $n = 4$ melletti $f(x_1) = f(x_2)$ belátásához elég a négyzetet x_1 és x_2 esetében egyaránt 4–4 egybevágó részre osztani a két oldalfelezővel, a részek átrendezésével egymásba mennek át (5. ábra, a szintén bemutatott minimum esetében $\varrho = x_0$).



5. ábra

Az $n = 5$ esetre a trigonometriai táblázat adatait használjuk fel. Mindig érvényes, hogy

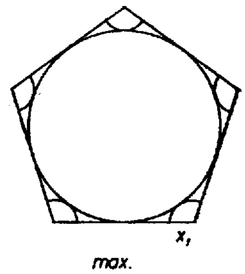
$$r = R\cos\frac{\pi}{n}, \qquad \frac{a}{2} = R\sin\frac{\pi}{n},$$

és mivel $n = 5$ mellett $\cos 36^\circ > 0{,}8 = \frac{4}{5}$ és $\sin 36^\circ > 0{,}6 = \frac{3}{5}$, azért

$$x_0 - x_1 = R\left(\frac{2}{5} - 1 + \cos 36^\circ\right) > \frac{R}{5},$$

$$x_2 - x = R\left(\sin 36^\circ - \frac{2}{5}\right) < \frac{R}{5},$$

tehát $f(x_1) > f(x_2)$, a lefedés maximumát úgy kapjuk, hogy k-ként a szabályos ötszög beírt körét vesszük (6. ábra).



6. ábra

Végül az $n>5$ értékekre jelöljük H-nak k'-beli átellenes pontját H'-vel. Az AHH' derékszögű háromszög felhasználásával

$$d=|x_1-x_0|-|x_2-x_0|=2x_0-(x_1+x_2)=2x_0-(FH+AF)=$$
$$=\frac{4R}{n}-\left(\frac{AH^2}{HH'}+AF\right)=\frac{4R}{n}-\left(\frac{AH^2}{2R}+AF\right).$$

A kivonandót növeljük, ha AF helyére az AH húrt írjuk, majd mindkét tagban az AH húr helyére az $AH=R\dfrac{\pi}{n}$ ívet:

$$\frac{d}{R}>\left(\frac{4}{n}-\frac{\pi^2}{2n^2}+\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(4-\pi-\frac{\pi^2}{2n}\right)>\frac{0{,}02}{n}>0,$$

(a zárójelben π^2-t 10-re növeltük és n-et 6-ra csökkentettük). Ezzel az előrebocsátottak szerint megmutattuk, hogy minden $n\geqq 5$ esetre úgy adja a rajzolt körrendszer a szabályos n-szög maximális lefedését, ha k-ként a beírt körből indulunk ki.

Brindza Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)