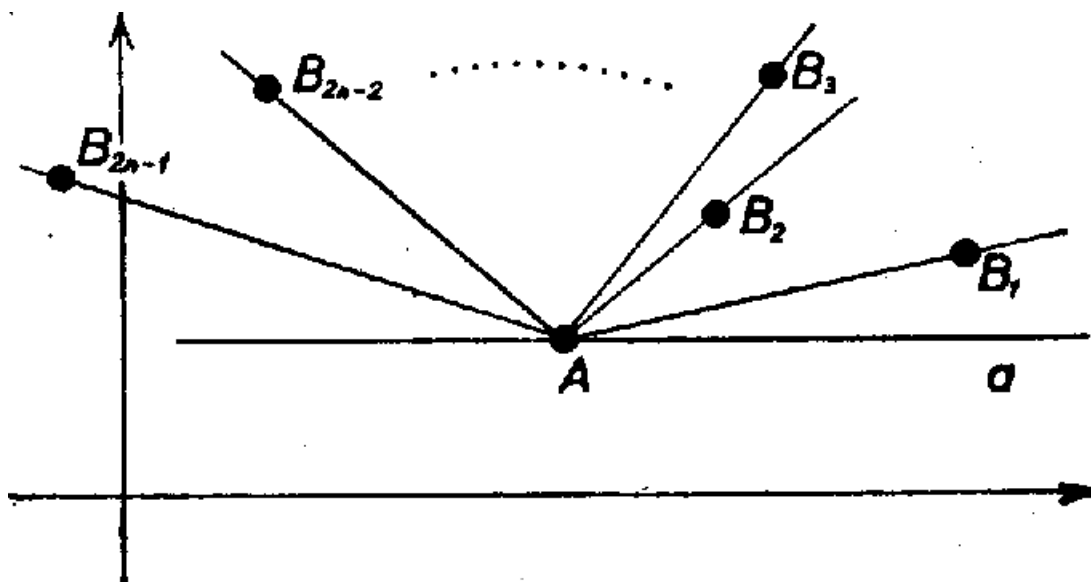


A feladatnál kissé általánosabban azt mutatjuk meg, hogy n piros és n kék pont esetén is létezik a kívánt összekötő rendszer, ahol $n \geq 1$ tetszőleges egész szám.

I. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Ha $n = 1$, az állítás triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy az állítást valamilyen n -ig már minden számra beláttuk. Megmutatjuk, hogy ebből az $(n + 1)$ -re is következik.

Tekintsük az összes olyan szakaszt, amelyek egyik végpontja piros, a másik kék pont. Azt fogjuk megmutatni, hogy ezek között van olyan, mondjuk AB , hogy az AB egyenes úgy vágja ketté a pontjainkat, hogy a piros és kék pontok száma a keletkező részekben belül is egyenlő. Az indukciós feltevésünk szerint e részekben belül már összeköthetőek a pontok a kívánt módon. Mivel a kapott szakaszoknak nincs közös pontjuk az AB szakasszal, azokat az AB szakasszal kiegészítve az egész pontrendszernek egy megfelelő összekötését kapjuk.

Vegyük fel egy tetszőleges koordináta-rendszert, és válasszuk ki a pontjaink közül a legkisebb ordinátáját, legyen ez A . (Ha a legkisebb ordinátához több pont is tartozna, A legyen közülük a legkisebb abszcisszájú.) Legyen mondjuk ez az A pont piros. Jelöljük a -val az A -n átmenő, x tengellyel párhuzamos egyenest, és tekintsük az A -ból a többi pont felé futó félegyeneseket. Ezek mind a -n vagy a fölött vannak, és mindegyikük pontosan egy A -tól különböző pontot tartalmaz, hiszen feltevésünk szerint pontjaink közt nincs három egyenesen. Vegyük a -nak az x tengely pozitív irányába mutató felét, és forgassuk ezt a félegyenest A körül pozitív irányba. Jelöljük a pontrendszer pontjait abban a sorrendben, ahogy találkozunk velük B_1 -gyel, B_2 -vel, $\dots$, B_{2n-1} -gyel (1. ábra).



1. ábra

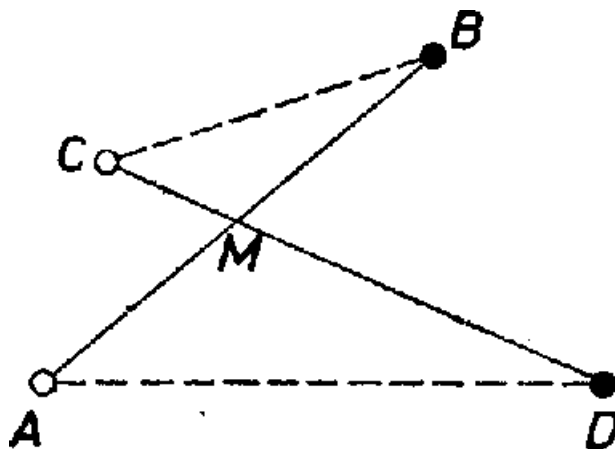
Ha B_1 vagy B_{2n-1} kék, a keresett AB szakasz szerepére választhatjuk az AB_1 , illetve AB_{2n-1} szakaszt.

Ha B_1 és B_{2n-1} is piros, tekintsük a B_1AB_2 , B_1AB_3 , $\dots$, B_1AB_{2n-1} szögtartományokat határaikkal együtt, és nézzük meg, hogy mennyi az általuk tartalmazott piros és kék pontok számának (előjeles) különbsége. A tartományok közül az elsőben, a B_1AB_2 tartományban ez a különbség 1 vagy 3, tehát pozitív, az utolsóban, B_1AB_{2n-1} -ben nulla, emiatt az utolsó előttiben -1 . Mivel az egymás után következő tartományok között a különbség mindig 1-gyel változik, kell lennie egy olyan tartománynak, ahol a különbség 0, legyen B_1AB_k az első ilyen tartomány ($1 < k < 2n - 1$). Ekkor B_k csak kék lehet, hiszen B_1AB_{k-1} -ben a piros és kék pontok számának a különbsége még pozitív. Most tehát AB_k választható a keresett AB szakasznak, a bizonyítást ezzel befejeztük.

Megjegyzés. A fenti alapgondolat teljes indukció nélkül is megfogalmazható, a ponthalmaz ismételt (legfeljebb $(n - 1)$ -szeri felosztásával. Magában az alkalmazott indukcióban nem lett volna elég a szokásos „ha n -re igaz, $(n + 1)$ -re is igaz” típusú megfontolás, hiszen a kettévágásnál n -nél kevesebb pontot is kaphatunk.

II. megoldás. Képzeljük el az összes összekötő rendszert, amelyek egy-egy kék és piros pontot kapcsolnak össze. Ezek száma $2n$ pont esetén $n!$, tehát *véges* érték. Ezek között nyilvánvalóan van egy, vagy több olyan rendszer, ahol az összes résztvevő szakaszok hosszúságainak összege minimális.

Tegyük fel most, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz. Ekkor kiválasztva a minimális összegű összekötést (vagy egyet a minimálisak közül), abban biztosan van legalább két metsző szakasz. Legyenek ezek AB és CD – ahol A és C pont kék, B és D pedig piros (2. ábra).



2. ábra

Módosítsuk úgy a rendszert, hogy a szaggatott vonal szerint A -t D -vel, B -t C -vel kötjük össze. Ha a metszéspont M , a háromszög-egyenlőtlenség miatt igaz a következő:

$$AM + MD > AD,$$

$$CM + MB > CB.$$

E kettőt összegezve:

$$AM + MB + CM + MD = AB + CD > AD + CB.$$

Vagyis a rendszer nem volt minimális, hiszen annál kisebbet találtunk. Ellentmondásra jutottunk, ezzel igazoltuk az állítást.