

$$(1) \quad x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \dots + x_k^{p_k} = y^q$$

Feladatunk az 1975. évi Arany Dániel Verseny egyik feladatának az általánosítása, ez nálunk az 1596. számú gyakorlat volt. A speciális eset megoldása két lépésből állt (megtalálható e szám 72. oldalán): először beláttuk, hogy egyáltalán van megoldás, majd megmutattuk, hogy ha egy gyök van, abból kiindulva végtelen sok is megadható. Az utóbbi igazolása esetünkben majdnem szó szerint megismételhető: ha (1) -nek $x_1, x_2, \dots, y$ gyöke, és s a $p_1, p_2, \dots, p_k, q$ számok közös többszöröse, akkor (1)-et tetszőleges a természetes szám s -edik hatványával szorozva kapjuk, hogy

$$\left(x_1 a^{\frac{s}{p_1}} \right)^{p_1} + \dots + \left(x_k a^{\frac{s}{p_k}} \right)^{p_k} = \left(y a^{\frac{s}{q}} \right)^q.$$

Mivel itt a zárójeleken belül természetes számok állnak, valóban újabb megoldást kaptunk, és mivel a tetszőleges volt, az így nyert megoldások száma valóban végtelen.

Elég tehát (1)-nek egyetlen megoldását megtalálni. A speciális esetben azt használtuk fel, hogy két egyenlő kitevőjű 2-hatvány összege is 2-hatvány. Mivel most k db hatvány összegének kellene egy újabb hatvánnyal egyenlőnek lennie, természetes ötletnek látszik a megoldást a k szám hatványai között keresni. A k^s hatvány egyben p_1 -edik, p_2 -edik, $\dots$, p_k -adik hatvány is, ha s a $p_1, p_2, \dots, p_k$ számok többszöröse, és mivel k^s -t k -szor összegezve k^{s+1} -et kapunk, elég azt biztosítani, hogy $(s+1)$ osztható legyen q -val.

Jelöljük a $p_1, p_2, \dots, p_k$ számok legkisebb közös többszörösét p -vel, feltevésünk szerint a p, q számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. Osszuk el a

$$p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p$$

számokat q -val, és jelöljük a kapott maradékokat r_1 -gyel, r_2 -vel, r_{q-1} -gyel. Ezek mind különbözőek, hiszen ha $r_i = r_j$ volna, $ip - jp$ osztható volna q -val. Mivel p és q relatív prímek, egyik maradék sem lehet 0, valamelyik közülük tehát $(q-1)$ -gyel egyenlő. Van tehát p -nek olyan többszöröse, amelyik q -val osztva $(q-1)$ maradékot ad, ha tehát ezt a többszöröst választjuk s -nek, az

$$x_i = k^{\frac{s}{p_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad y = k^{\frac{s+1}{q}}$$

számok természetes számok, és (1) egy gyökrendszerét adják. A feladat állítását ezzel bizonyítottuk.

Baksai Róbert (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem vezetne célra, ha most is 2-hatványokat akarnánk használni. Annyi azonban látható ezen az úton, hogy a feladat feltétele nem szükséges ahhoz, hogy (1)-nek végtelen sok megoldása legyen. Mint láttuk, ehhez elegendő, hogy (1)-nek egyáltalán legyen megoldása. Mivel pedig $2^4 + 2^4 + 2^5 = 2^6$, (1)-nek akkor is lehet megoldása, ha a p_i -k nem mind relatív prímek q -hoz.