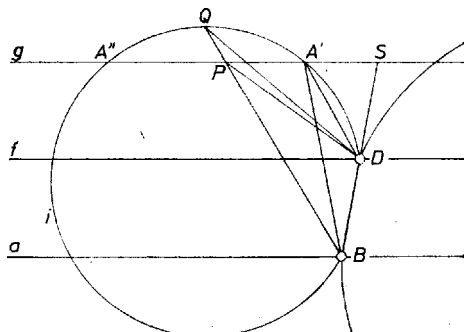


Felvéve a $BC = a$ oldalegyenest, nyilvánvaló, hogy az A csúcs az ezzel párhuzamos, tőle m_a távolságban haladó g egyenesen lesz, az AC oldal D felezőpontja pedig, amelyre $BD = s_b$, az a és g között, tőlük egyenlő távolságban haladó f egyenesen. Ma még az f -en tetszőlegesen megválasztott D körüli s_b sugarú körívvel kimetsszük a -ból B helyzetét, hosszúságadatainkat felhasználtuk.

A BAC szög egyszersmind a DAB háromszögnek is szöge, pontosabban a DB szakasznak A -ból, a g egyenes valamely pontjából vett látószöge. Tekintsük ezért DB -nek a g -t metsző látóköríveit különböző látószögek mellett, legyenek egy ilyen ív i és g -vel közös pontjai A' , A'' . Az A' -ből és A'' -ből vett látószögek nem lehetnek maximálisak (ezek egyenlők, mert ugyanazon a partján vannak a BD egyenesnek), hiszen az $A' A''$ húr egy tetszőleges P pontjára – a BP egyenes és az $A' A''$ ív közös pontját Q -val jelölve – a külső szög tétele alapján (1. ábra)

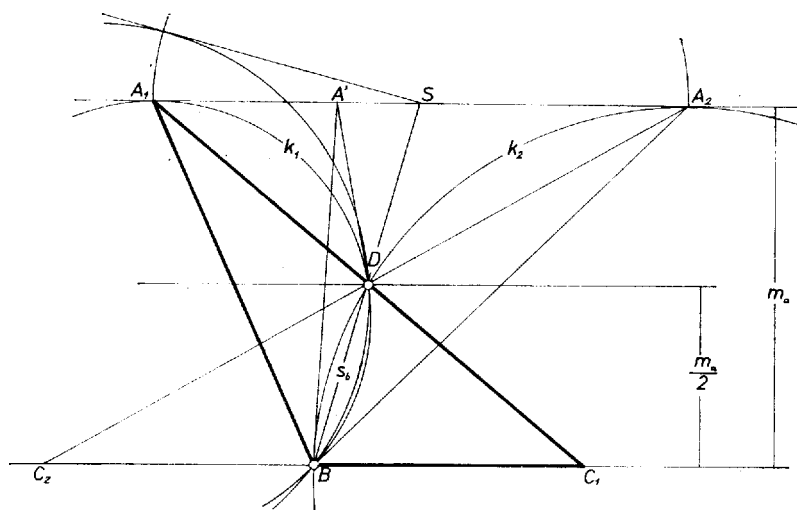
$$BPD\angle = BQD\angle + PDQ\angle > BQD\angle = BA'D\angle.$$



1. ábra

Eszerint a látószög csak a B -n és D -n átmenő, g -t érintő körök A_1 , ill. A_2 érintési pontjaiban lehet maximális.

Ilyen kör a BD egyenes mindkét partján várható, megszerkesztésükhöz mindjárt felhasználhatjuk az előbbi i -t tartalmazó k kört. Legyen ugyanis a BD és g egyenesek metszéspontja S , így ismert tétel szerint $SA_j^2 = SD \cdot SB$ ($j = 1, 2$), azaz SA_j az SB , SD szakaszok mértani középárányosa, és ugyanezen feltétel szerint SA_j hosszát megadja bármely, a B , D pontokon átmenő körhöz S -ből szerkesztett érintőszakasz hossza. Eszerint megszerkesztve, az S -ből a k -hoz húzott érintők egyikét – érintési pontja legyen T –, az S körüli, T -n átmenő kör kimetszi g -ből A_1 -et és A_2 -t. Ezekből a háromszög hátralevő csúcsának C_1 , C_2 helyzetét a D -re való tükrözéssel kapjuk.



2. ábra

Az előzőek azt bizonyítják, hogy a g -n haladó pontból a BD szakasz látószögének A_1 -ben vagy A_2 -ben van maximuma. Ugyanis $SA' \cdot SA'' = SA_2^2$ miatt valamelyik érintési pont az $A' A''$ között van és játszhatja P szerepét. Az viszont, hogy a BA_1D és BA_2D szögek közül melyik a nagyobb – hiszen nyilván ezt keressük –, külön kell eldöntenünk. Nyilvánvalóan egyenlő e két szög, ha BD merőlegesen áll g -re (azaz ha $s_b = \frac{m_a}{2}$), de így BD szimmetriatengellyé válik és a két megoldás úgysem számít különbözőnek. Máskülönben válasszuk úgy az indexeket, hogy $A_1SD\angle < A_2SD\angle$ legyen, megmutatjuk, hogy így $BA_1D\angle > BA_2D\angle$. Valóban, A_2 -nek a BD tengelyre való A'_2 tükröképe g -nek D -t nem tartalmazó partján van, így az A'_2 , B , D pontokkal meghatározott kör két pontban metszi g -t (a BD -vel párhuzamos

$A_1A'_2$ egyenes két partján), így a $BA'_2D \triangleleft = BA_2D \triangleleft$ nem lehet maximális, hiszen A_1 rajta van azon a húron, amit g e körből kimetsz.

Nyilvánvaló az eddigiekből, hogy feladatunkból a legnagyobb BAC szögre vonatkozó rész megoldhatóságának egyetlen feltétele $s_b \geq \frac{m_a}{2}$, és ekkor a megoldás egyértelmű.

A legkisebb BAC szögre vonatkozó részre válaszunk: ilyen háromszög nincs, hiszen amíg $A \neq S$, addig A helyére (amennyiben A a fenti SA_1 szakaszon van) az AS szakasz egy belső A' pontját véve, $BA'D \triangleleft < BAD \triangleleft$; ha viszont A azonos S -sel, akkor a háromszög elfajul egyenesszakasszá, az m_a magasság értelmét veszti.

Megjegyzés. Az SA_i mértani közép természetesen máshogyan is szerkeszthető, többek között a nyilvánvaló

$$SA_i = SD \cdot \sqrt{2} = \frac{SB}{\sqrt{2}}$$

összefüggésből is.