

Az első egyenletben szereplő kifejezéseknek csak $x > 0$, $y > 0$ esetén van értelmük. Tetszőleges $a > 0$ számot fel tudunk írni 10 hatványaként: $a = 10^{\lg a}$. Ennek, valamint a hatványozás és logaritmálás azonosságainak felhasználásával egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$10^{\lg x \lg y} + 10^{\frac{1}{2} \lg x \lg y} = 110, \quad \lg x + \lg y = 3.$$

Itt az első egyenlet $10^{\frac{1}{2} \lg x \lg y}$ -ra nézve másodfokú, gyökei

$$(1) \quad 10^{\frac{1}{2} \lg x \lg y} = 10 \quad \text{vagy} \quad 10^{\frac{1}{2} \lg x \lg y} = -11.$$

Ez utóbbi lehetetlen, mert 10-nek bármely hatványa pozitív, az (1) szerint

$$\lg x \cdot \lg y = 2.$$

Ismerjük a $\lg x$ és $\lg y$ számok összegét és szorzatát, így $\lg x$ és $\lg y$ a

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

egyenlet gyökei. Ennek ismeretében kapjuk az eredeti egyenletrendszer gyökeit:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10, & y_1 &= 100 \quad \text{és} \\ x_2 &= 100, & y_2 &= 10. \end{aligned}$$

Mindkét számpár valóban megoldás.

Lenkei Péter (Budapest, József A. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Ha már tudjuk, hogy a $10^{\lg x \lg y} + 10^{\frac{1}{2} \lg x \lg y} = 110$ egyenletnek $\lg x \cdot \lg y = 2$ gyöke, az, hogy más gyök nem lehet, az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő voltából is látható.