

A $\sin x$ függvény differenciáhányadosa

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Itt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ (gimnáziumi tankönyv III. osztály, 221. old.), emiatt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = 0,$$

és így

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Ez azt jelenti, hogy az $s(x) = \sin x$, $c(x) = \cos x$ függvényekre teljesül (1). Mivel $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, e függvény deriváltja

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

Tehát az $s(x) = \sin x$, $c(x) = \cos x$ függvényekre (2) is teljesül. Nyilvánvalóan teljesül rájuk (3) is, nekünk azonban nemcsak azt kell megmutatnunk, hogy ezekre a függvényekre teljesülnek az (1)–(3) feltételek, hanem azt is, hogy ezek a feltételek más függvenypárra nem teljesülhetnek.

Legyen $s(x)$, $c(x)$ tetszőleges függvenypár, amelyre teljesülnek az (1)–(3) feltételek, és tekintsük az $s(x) - \sin x$, $c(x) - \cos x$ különbségeket. Azt kell belátnunk, hogy e különbségek azonosan egyenlőek 0-val, ehelyett azt látjuk be, hogy a négyzetösszegük azonosan 0. Mivel az

$$f(x) = (s(x) - \sin x)^2 + (c(x) - \cos x)^2$$

függvény értéke $x = 0$ mellett 0, a feladatban mondott tétel alapján elegendő, ha megmutatjuk, hogy $f'(x) = 0$ minden x -re.

Vizsgáljuk meg először, hogy ha $g(x)$ tetszőleges deriválható függvény, deriválható-e a $G(x) = (g(x))^2$ függvény, és ha igen, mivel egyenlő a deriváltja. Mivel

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot g[(x+h) + g(x)]$$

és itt g differenciálhatósága miatt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x),$$

valamint

$$\lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) + g(x)] = 2g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = 2g(x),$$

tehát $G(x)$ deriválható, és deriváltja $2g'(x)g(x)$. Emiatt $f(x)$ deriválható, és deriváltja

$$f'(x) = 2(s'(x) - \cos x)(s(x) - \sin x) + 2(c'(x) + \sin x)(c(x) + \cos x),$$

ami (1), (2) szerint valóban 0.

Csúri Miklós (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Megoldásunk végén azt is beláttuk, hogy ha $g(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban deriválható, akkor ott folytonos is, hiszen tetszőleges $a \leq x \leq b$ mellett

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g(x).$$

Ismeretes, hogy a zárt intervallumban folytonos függvények az intervallum belsejében vagy határán a maximumukat is, minimumukat is felveszik (gimnáziumi tankönyv IV. oszt., 89. old.). Ebből következik, hogy ha $g(a) = g(b)$, akkor van olyan $a < x_0 < b$ hely, ahol $g'(x_0) = 0$, és általában, tetszőleges, az $a \leq x \leq b$ intervallumban differenciálható $g(x)$ függvényhez található olyan $a < x_0 < b$ hely, amelyre

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

teljesül. Ez az ún. Lagrange-féle középérték-tétel, mely a differenciálható függvények vizsgálatának az alapja. A feladatban felhasznált tétel is ebből következik, hiszen e tétel szerint tetszőleges $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ számokhoz található olyan x_0 , amelyre $x_1 < x_0 < x_2$, és

$$g'(x_0) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ha tehát $g'(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban azonosan 0, akkor tetszőleges $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ mellett $g(x_1) = g(x_2)$, azaz $g(x)$ értéke az (a, b) intervallumban állandó. Hasonlóan igazolható, hogy ha $a \leq x \leq b$ mellett $g'(x) > 0$, akkor az (a, b) intervallumban $g(x)$ monoton nő, ha pedig ott $g'(x)$ negatív, akkor $g(x)$ monoton fogy (vö. gimnáziumi tankönyv III. oszt., 270–273. old.).