

I. megoldás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) &= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + \\ &+ (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + \dots + (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) + \\ &+ (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + \dots + (a_2 - a_n)(b_2 - b_n) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} - b_n). \end{aligned}$$

A zárójeleket mindkét oldalon felbontva, meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlőség helyes. Feltételünk szerint a jobb oldali összeg egyik tagja sem lehet negatív, amivel az állítást máris igazoltuk. Könnyen ellenőrizhetjük a fenti átalakítás alapján, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lép fel, ha az $a_1 = \dots = a_n$ és a $b_1 = \dots = b_n$ egyenlőségláncoknak legalább egyike teljesül.

A bizonyításból az is látszik, hogy monoton csökkenő sorozatok esetében is igaz az egyenlőtlenség, ha pedig az a_n sorozat monoton növekvő, és a b_n csökkenő, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul.

II. megoldás. Legyen $c_1, c_2, \dots, c_n$ a $b_1, \dots, b_n$ sorozat egy tetszőleges permutációja. Belátjuk, hogy ekkor

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Ha valamely $i < j$ indexpárra $c_i > c_j$, akkor a $\sum_{k=1}^n a_k c_k$ összegben cseréljük fel c_i -t és c_j -t egymással. Ezzel az összeg értéke biztosan nem csökken, hiszen $(a_j - a_i)(c_i - c_j) \geq 0$ miatt $a_i c_i + a_j c_j \leq a_i c_j + a_j c_i$. Véges sok csere végrehajtásával a $c_1, \dots, c_n$ számok olyan $d_1, \dots, d_n$ permutációjához jutunk, amelyben $i < j$ már $i < j$ esetén $d_i \leq d_j$ teljesül minden indexpárra. Ekkor persze $b_i = d_i$ minden $i = 1, \dots, n$ -re, és mivel a végrehajtott cserék során az összeg értéke egyetlen lépésnél sem csökkent, valóban fennáll az (1) egyenlőtlenség.

Ezek alapján már könnyen következik a feladat állítása.

A $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ összegbe írjuk be a $b_1, \dots, b_n$ számok valamennyi ciklikus permutációját, így a fentiek szerint

$$a_1 b_k + a_2 b_{k+1} + \dots + a_n b_{k-1} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva a feladat állítását nyerjük. Könnyen látható, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $a_1 = \dots = a_n$ és $b_1 = \dots = b_n$ egyike teljesül.

Jakab Tibor (Budapest, Berzsényi D. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Jelöljük az $a_1, a_2, \dots, a_n$, illetve $b_1, b_2, \dots, b_n$ szám- n -eseket a -val, b -vel, a bizonyított egyenlőtlenség jobb és bal oldalának a különbségét $C(a, b)$ -vel:

$$C(a, b) = n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right),$$

az a_i, b_i számok átlagát pedig $\bar{a}$ -sal, $\bar{b}$ -sal:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i.$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$(2) \quad C(a, b) = n \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}),$$

ugyanis

$$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i - a_i \bar{b} - \bar{a} b_i + \bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i - \bar{b} \sum_{i=1}^n a_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n b_i + n \bar{a} \cdot \bar{b},$$

és itt az utolsó három tag mindegyike egyenlő $\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$ -vel. A $C(a, b)$ -nek (2) alakjából látszik, hogy ha akár az a_i , akár a b_i számokat ugyanazzal a számmal megnöveljük, $C(a, b)$ értéke változatlan marad. Ennek alapján

is bizonyítható a feladatban szereplő egyenlőtlenség n szerinti indukcióval, a mondott eltolással el lehet ugyanis érni, hogy $a_1 = b_1 = 0$ legyen.

Ha speciálisan $a = b$, a $C(a, b) \geq 0$ egyenlőtlenség közvetlenül kiolvasható a (2) előállításból. A $C(a, a)$ szám azt mutatja meg, mennyire szóródnak az a_i számok az $\bar{a}$ átlag körül, ezért a matematikai statisztikában ezt a mennyiséget széles körben használják. Maga a $C(a, b)$ mennyiség az a_i, b_i számok változásainak kölcsönhatását mutatja, pozitív C inkább az egyirányú, negatív C az ellentétes irányú változásokra utal. Például ha a_i az osztály i -ik tanulójának a magassága, b_i pedig a súlya, és a tanulókat eleve a magasságuk szerint állítottuk sorba, tehát $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ (ahol n az osztály létszáma), ha a $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ egyenlőtlenség általában nem is teljesül, $C(a, b)$ értéke az esetek többségében mégis pozitív. Ezért ezt a mennyiséget a statisztikában az a, b mennyiségek kölcsönhatásának a mérésére használják, és az a, b számok kovarianciájának nevezik. (Pontosabban mondva a $C(a, b)$ szám $n(n-1)$ -ed része a kovariancia.) Mivel ez a szám még nagy mértékben függ az $a_i b_i$ számok mérésénél használt egységtől, többet mond nála az

$$R(a, b) = \frac{C(a, b)}{\sqrt{C(a, a) \cdot C(b, b)}}$$

hányados, melyet korrelációs együtthatónak neveznek. Belátható, hogy $-1 \leq R(a, b) \leq 1$, és $|R(a, b)| = 1$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan λ és μ , amelyekkel $b_i = \lambda a_i + \mu$ teljesül minden i -re. Ha az a_i, b_i számpárokat egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, a kapott pontokhoz bizonyos értelemben legjobban simuló egyenes egyenlete

$$(3) \quad y - \bar{b} = \lambda(x - \bar{a}),$$

ahol

$$\lambda = \frac{C(a, b)}{C(a, a)}$$

az ún. regressziós együttható. Az érdeklődő olvasónak gyakorlásul javasoljuk, hogy a környezetében található összetartozó a_i, b_i számpárokat gyűjtse össze, ábrázolja, és rajzolja meg hozzájuk a (3) egyenletű egyenest. Ha az a_i számok az idő múlását mérik, és a b_i számok valamilyen időben lezajló jelenséggel kapcsolatosak, a kapott egyenes jól tükrözi a jelenségnek a vizsgált időszakban megmutatkozó fő tendenciáját, szokásos kifejezéssel élve, a jelenség trendjét. Ennek segítségével vizsgálhatjuk például a termelés különböző mutatóinak az alakulását, és e vizsgálatok alapján határozhatjuk meg e mutatók jövőbeni viselkedését is.