Keressük a $p(x)$ és $q(x)$ másodfokú polinomot $p(x) = ax^2 + bx + c$ és $q(x) = rx^2 + sx + t$ alakban. Ha a $p\left(q(x)\right)$ összetett függvény azonos az $f(x)$ polinommal, akkor a megfelelő együtthatók megegyeznek, és így az együtthatók összehasonlításával az

$$\begin{aligned} ar^2 &= A, \\ 2\,ars &= B, \\ 2\,art + as^2 + br &= C, \\ 2\,ast + bs &= D, \\ at^2 + bt + c &= E \end{aligned}$$

egyenletrendszerre jutunk. A kérdéses előállításnak tehát szükséges és elégséges feltétele, hogy ez a rendszer az a, b, c, r, s, t ismeretlenekre megoldható legyen. Világos, hogy az utolsó egyenletet figyelmen kívül hagyhatjuk, ugyanis c csak ebben szerepel, ha tehát a, b és t értékét már valahogy meghatároztuk, c-t mindig megválaszthatjuk úgy, hogy az ötödik egyenlet teljesüljön. Az $A \neq 0$ feltételből az első egyenlet alapján $a \neq 0$ és $r \neq 0$. Az első egyenlettel a további hármat végigosztva a

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= 2\,\frac{s}{r}, \\ \frac{C}{A} &= 2\,\frac{t}{r} + \frac{s^2}{r^2} + \frac{b}{ar}, \\ \frac{D}{A} &= \left(2\,\frac{t}{r} + \frac{b}{ar}\right)\frac{s}{r} \end{aligned}$$

egyenletekre jutunk és ezekből

$$\left(\frac{C}{A} - \frac{1}{4}\,\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{B}{A} = \frac{D}{A},$$

vagyis

$$D = \frac{BC}{2A} - \frac{B^3}{8A^2}. \tag{*}$$

Ahhoz tehát, hogy az $f(x) = p\left(g(x)\right)$ előállítás lehetséges legyen, f együtthatói között teljesülnie kell a fenti egyenlőségnek, hiszen következménye az együtthatókra felírt egyenletrendszernek. Másrészt, ha a (*) egyenlet teljesül, akkor az egyenletrendszer megoldható: legyen pl. $r = 1$, $t = 0$, az első egyenletből $a = A$, a másodikból $s = \dfrac{B}{2A}$, a harmadikból $b = C - \dfrac{B^2}{4A}$ és (*) biztosítja, hogy a negyedik egyenlet ezzel nincs ellentmondásban, végül az ötödik egyenletből c is kifejezhető.

Hornung Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)