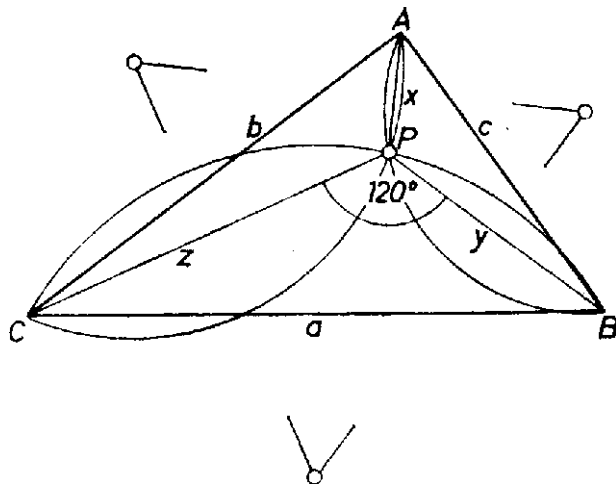


I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $BC = a = 79$, $CA = b = 65$, $AB = c = 47$ egység, a szóban forgó pont P , és $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$. Pontunk semmiféle háromszög esetében sem lehet kívül a háromszögön, különben ugyanis két oldal látószöge együtt egyenlő lenne a harmadik látószöggel, akár valamelyik szög csúcsstartományában próbálnánk fölvenni P -t, akár valamelyik oldalával szomszédos, végtelenbe nyúló ún. serpenyőtartományában; így pedig nem lehet egyenlő a három látószög. Hasonlóan nem lehet P a háromszög területén sem.

Eszerint a látószögek összege 360° , és mindegyiknek 120° az értéke, és P -t szerkesztéssel úgy kapjuk, hogy vesszük két oldalszakasz 120° -os nyílású látókörívét azon a partjukon, amelyekben a háromszög van, ezek közös pontja P . (1. ábra.)



1. ábra

Alkalmazzuk a cosinustételt egymás után a PBC , PCA , PAB háromszögnek P -vel szemben levő oldalára. A P -nél levő szög cosinusa mindegyikben $(-0,5)$, így

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 + xy = c^2, \\ (2) \quad & y^2 + z^2 + yz = a^2, \\ (3) \quad & z^2 + x^2 + zx = b^2. \end{aligned}$$

Vonjunk ki egyrészt (2)-ből (3)-at, másrészt (3)-ból (1)-et:

$$\begin{aligned} (4) \quad & y^2 - x^2 + z(y - x) = (y - x)(x + y + z) = a^2 - b^2, \\ (5) \quad & z^2 - y^2 + x(z - y) = (z - y)(x + y + z) = b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Itt célszerű feladnunk az általános megoldás keresését, ugyanis az oldalak adott mértékszámai jelentős könnyítést adnak azzal, hogy legutóbbi két egyenletünk jobb oldala egyenlő:

$$a^2 - b^2 = 79^2 - 65^2 = 2016 = 65^2 - 47^2 = b^2 - c^2.$$

Így (4) és (5) bal oldalainak egyenlőségéből $x + y + z > 0$ miatt

$$y - x = z - y > 0,$$

vagyis x , y és z ebben a sorrendben növekvő számtani sorozatot alkot. Ezért a három ismeretlen összege (4)-ben és (5)-ben $3y$, ezt és a számadatokat behelyettesítve

$$y - x = z - y = \frac{2016}{3y} = \frac{672}{y}.$$

Innen a sorozat mindkét szélső tagja kifejezhető a középsővel:

$$(6) \quad x = y - \frac{672}{y} = \frac{y^2 - 672}{y}, \quad z = y + \frac{672}{y} = \frac{y^2 + 672}{y},$$

és ezeket (3)-ba helyettesítve y^2 -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} (y^2 + 672)^2 + (y^2 - 672)^2 + (y^4 - 672^2) &= (65y)^2, \\ 3y^4 - 65^2y^2 + 672^2 &= 0, \\ y^2 &= \frac{1}{6} \left(4225 \pm \sqrt{12\,431\,617} \right) = \begin{cases} 1291,8, \\ 611,5. \end{cases} \end{aligned}$$

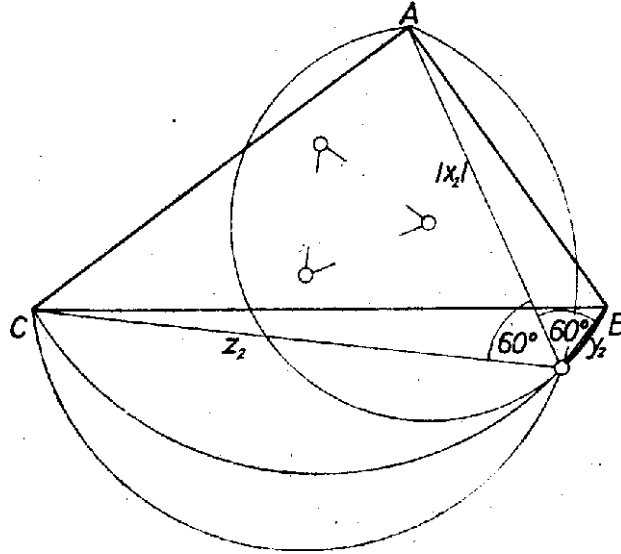
Természetesen elég vennünk y pozitív értékeit:

$$y_1 = 35,94, \quad y_2 = 10,79.$$

A (6)-ba leendő behelyettesítés céljára $672/y_1 = 18,70$, $672/y_2 = 62,26$, és az előbbi alapján a keresett távolságok:

$$x = PA = 17,24, \quad y = PB = 35,94, \quad z = PC = 54,61 \text{ egység.}$$

A másik megoldás: $x_2 = -51,46$, $y_2 = 10,79$, $z_2 = 73,04$, ha x_2 abszolút értékét vesszük, szintén meghatározza a sík egy P_2 pontját (2. ábra).



2. ábra

Előre tudjuk, hogy ez nem felel meg feladatunk geometriai kérdésének, de hozzátehetjük: így az AB és AC oldalak látószögének cosinusa (1) ill. (3) szerint $+0,5$, e két látószög 60° , a BC oldalé 120° , amazok összege. P_2 annak a 3 körívnek a közös pontja, amelyek az 1. ábrabelieknek tükörképei a megfelelő oldalra. (Eszerint x_2 -t alaposabb indokolással mellőztük, mint a két y^2 érték negatív négyzetgyökét. Egyébként e negatív négyzetgyökökkel x és z csupán előjelet változtatnak, és ismét az eddigi két megoldásra jutunk.)

Megjegyzés. A talált P pontot a látószögek egyezése alapján tetszőleges ABC háromszögben a háromszög izogonális pontjának nevezik.

II. megoldás. Illesszünk a vizsgált háromszög oldalaihoz kifelé szabályos háromszögeket, és jelöljük ezek A -val, B -vel, C -vel szemközti csúcsait rendre A_1 -gyel, B_1 -gyel, C_1 -gyel. Ha az eredeti háromszög A -nál levő szöge kisebb 120° -nál, akkor az AC egyenest AB -n keresztül AC_1 -be vivő forgatás kisebb 180° -nál, tehát C_1 az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint B . Ha az ABC szög is kisebb 120° -nál, akkor C_1 a BC egyenesnek is ugyanazon az oldalán van, mint az eredeti háromszög, tehát a CC_1 szakasz metszi az AB oldalt. Ha pedig az eredeti háromszög minden szöge kisebb 120° -nál, akkor ugyanígy kapjuk az AA_1 , BB_1 szakaszokra, hogy metszik a szemközti oldalt, tehát rendre egymást is metszik. Megmutatjuk, hogy ekkor e három szakasz egy ponton megy át, és ez a keresett P pont.

Forgassuk el az ABB_1 háromszöget A körül úgy, hogy B a C_1 -be kerüljön. Akkor a B_1 a C -be megy át, tehát a BB_1 , CC_1 szakaszok M metszéspontjából az AB , BC oldalak 120° -os szög alatt látszanak. Eszerint M rajta van az I. megoldás elején említett két 120° -os látókörön, tehát valóban azonos P -vel. Mivel ez a CC_1 , AA_1 , valamint az AA_1 , BB_1 szakaszok metszéspontjáról is elmondható, mindhárom szakasz átmegy P -n.

$$w^2 = (x + y + z)w = 2\sqrt{3}t + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Ebből négyzetgyökvonással kapjuk w értékét, és ezt az xw , yw , zw szakaszokra vonatkozó összefüggésekbe helyettesítve kapjuk az x , y , z távolságokat. Ha – mint esetünkben – az eredeti háromszögben a három oldal nagysága adott, akkor t értékét a Heron-képletből számíthatjuk.

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{191 \cdot 33 \cdot 61 \cdot 97} = 1526,74,$$

tehát

$$xw = 1859,43$$

$$yw = 3875,43$$

$$zw = 5891,43$$

$$w = 11626,29 = 107,83$$

$$x = 17,24; \quad y = 35,94; \quad z = 54,64.$$

Számolás közben láttuk, hogy mindegyik oldal négyzete kisebb a másik két oldal négyzetének összegénél, így a vizsgált háromszög hegyesszögű. Emiatt az elmondottak érvényesek rá, a P pont létrejön, és a kapott eredmények helyesek.