

Tekintsük az $f(x)$ primitív függvényét, az

$$(1) \quad F(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{k} \sin kx - \frac{b_k}{k} \cos kx \right)$$

függvényt. Mivel a $\cos kx$, $\sin kx$ függvények 2π szerint periodikusak, az egész számegyenesen folytonosak és deriválhatóak, $F(x)$ is folytonos, deriválható, és 2π szerint periodikus. Mivel $F(x)$ a $0 \leq x \leq 2\pi$ zárt intervallumon folytonos, van olyan $0 \leq x_0 \leq 2\pi$ szám, melyre

$$(2) \quad F(x) \leq F(x_0)$$

teljesül tetszőleges $0 \leq x \leq 2\pi$ mellett, vagyis $F(x)$ felveszi a maximumát a $[0, 2\pi]$ szakaszon. Mivel $F(x)$ 2π szerint periodikus, (2) tetszőleges x mellett teljesül. Emiatt $F'(x_0)$ értéke csak 0 lehet, azaz $f(x_0) = 0$, és ezzel a feladat állítását beláttuk.