

Legyen

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} \quad \text{és} \quad b_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n - 2 + \sqrt{2n - 1}}}} \quad (n \geq 2).$$

Ha a_n kifejezésében a legbelső gyökjel alá n helyett n^2 -et írunk, akkor éppen b_n -et kapjuk, és mivel ezzel a_n értékét növeltük, fennáll az $a_n < b_n$ ($n \geq 2$) egyenlőtlenség.

Ha most b_n kifejezésében a legbelső gyökjel alá $2n - 1$ helyébe $(n - 1)^2$ -et írunk, akkor éppen b_{n-1} -et kapjuk. Ezzel ismét növeltünk, vagyis legalábbis nem csökkentettünk, feltéve, hogy $2n - 1 \leq (n - 1)^2$ teljesül. Egyszerű számolás mutatja, hogy ezen utóbbi egyenlőtlenség minden $n \geq 4$ természetes számra fennáll. Eszerint a $b_3, b_4, \dots, b_n, \dots$ sorozat monoton fogyó, és így $n \geq 3$ mellett $b_3 \geq b_n > a_n$. Emiatt elég belátni, hogy $b_3 = \sqrt{1 + \sqrt{5}} < 9/5$ fennáll. Ez viszont valóban igaz, amint erről közvetlen számolással könnyen meggyőződhetünk. Végül $a_1 = 1 < a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} < b_3$ miatt igaz állításunk $n = 1$ és $n = 2$ mellett is.