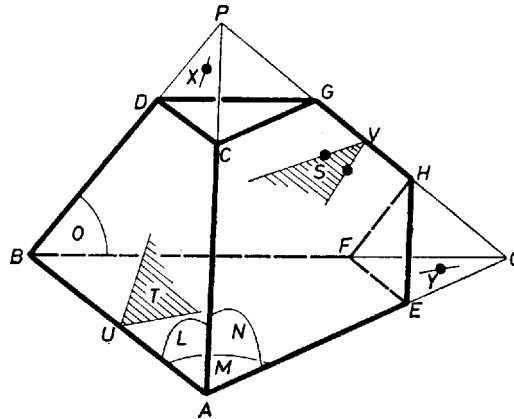


Jelöljük a vizsgált testet K -val, a feladatban utoljára említett két csúcsát A -val, B -vel. Mivel 3 egységnyi él csak ezekből indul, a belőlük induló 3 egységnyi él az őket összekötő AB szakasz. Ez az él a K -t önmagába vivő tetszőleges tükrözéssel önmagába megy át, hiszen K -nak nincs más, vele egyenlő hosszú éle.



Jelöljük az AB élt alkotó lapokat L -lel, M -mel. Ezek a K -t önmagába vivő tükrözéskor vagy önmagukba vagy egymásba mennek át. Ha egy tükrözés K -t önmagába viszi, és az L , M lapokat felcseréli, akkor a tükrözés síkja átmegy AB -n, elválasztja egymástól az L , M lapokat és felezi a lapok síkja által alkotott szöget. Ez a sík tehát egyértelműen meghatározott, jelöljük S -sel. – Ha pedig egy tükrözés K -t, L -et, M -et önmagába viszi, akkor síkja csak AB felező merőlegese lehet, jelöljük ezt T -vel. K -t tehát csak az S -re, T -re vonatkozó tükrözések vihetik önmagába, és mivel K -nak két szimmetriasíkja van, ezek a tükrözések önmagába is viszik át a K -t.

Az A -ból, B -ből induló, AB -től különböző élek hossza 2 egység. Mivel A -n és B -n kívül nincs K -nak olyan csúcsa, melyből két db 2 egységnyi él indulna, azért ezeknek az éleknek a másik végpontjuk nem lehet azonos. Jelöljük L -nek A -val, B -vel szomszédos csúcsait C -vel, D -vel, ezek S -re vonatkozó tükörképét E -vel, F -fel. Ekkor $AC = AE = BD = BE = 2$.

Mivel a T -re vonatkozó tükrözés C -t és D -t felcseréli, azért $CD \perp T$, azaz $CD \parallel AB$, vagyis az $ABCD$ idom szimmetrikus trapéz, $ABFE$ is az, $CDFE$ pedig téglalap. Mivel A -hoz, B -hez más él nem csatlakozik, K -nak az ACE , BDF síkokban is van egy-egy lapja, jelöljük ezeket N -nel, O -val. Az előírás szerint K -nak 8 csúcsa van, közülük már említettünk 6-ot, ezeken kívül még 2 csúcs van. Be fogjuk látni, hogy ezek N -nek is, O -nak is csúcsai.

Először megmutatjuk, hogy L azonos az $ABCD$ trapézzal. Ha ugyanis L -nek volna még egy X csúcsa, akkor L konvexitása miatt az csak CD -nek AB -t nem tartalmazó oldalán lehetne. Így X -nek S -re vonatkozó Y tükörképe – az M lapban – különbözne X -től: ez volna K nyolcadik csúcsa. K konvexitása miatt XY éle volna K -nak, és mivel más csúcsa már nincs K -nak, azért CE és DF is él volna. Ámde ekkor $XY = CE = DF = 1$ volna, hiszen K még nem említett élei mind 1 egységnyiek. Emiatt a CDX , EFY síkok párhuzamosak volnának, ami nem lehet, hiszen ezek az egymáshoz AB -ben csatlakozó L , M lapok síkjai. Ezzel beláttuk, hogy L azonos az $ABDC$ trapézzal, tehát CD éle a K -nak: $CD = 1$.

Így az AC , BD egyenesek CD -nek AB -vel ellentétes oldalán metszik egymást, jelöljük a metszéspontjukat P -vel, P -nek S -re vonatkozó tükörképét Q -val. A PCD , PAB háromszögek hasonlóak, hasonlósági arányuk: 1:3, tehát $AC = 2$ miatt $PC = PD = 1$, vagyis a PCD , PAB háromszögek szabályosak, és szabályosak a QEF , QAB háromszögek is.

Jelöljük az AB , PQ szakaszok felezőpontját U -val, V -vel. Az S -re, T -re vonatkozó tükrözést egymás után végrehajtva az UV egyenesre való tükrözést (vagyis az egyenes körüli 180° -os forgatást) kapjuk, feltevésünk szerint K -t ez a transzformáció is önmagába viszi. Mivel az eddig említett 6 csúcs halmaza S -re is, T -re is szimmetrikus, ilyennek kell lennie a még meg nem nevezett 2 csúcs halmazának is. A 2 csúcs által meghatározott szakasz tehát S -re is, T -re is, így az UV egyenesre nézve is szimmetrikus. K konvexitása miatt ez a szakasz nem lehet az UV egyenesen, tehát a hiányzó pontok egyike sem lehet az UV egyenesen.

Az S -re vonatkozó tükrözés AC -t AE -be viszi, tehát ez a tükrözés N -et önmagába viszi. N nem lehet azonos az ACE háromszöggel, hiszen ekkor K -nak csak az A, B, C, D, E, F pontok lehetnének a csúcsai. Jelöljük N -nek C -vel szomszédos (A -tól különböző) csúcsát G -vel, a K nyolcadik csúcsát H -val. Ha G az S -en van, akkor különböznie kell V -től, mert csak így nincs rajta a T -n is. Ekkor H a G -nek T -re vonatkozó tükörképe. Ámde ezek a pontok csak a $CDFE$ téglalap AB -vel ellentétes oldalán lehetnének, így $CD = 1$ miatt $GH < 1$ volna, ami nem lehet.

G tehát nem lehet rajta S -en, így S -re vonatkozó H tükörképe is csúcsa N -nek. Mivel K -nak további csúcsa nincs, a G, H pontok rajta vannak T -n, és így a PQ szakaszon is. Ekkor $CG = CP = 1$, $AP = AQ = 3$ miatt a CPG háromszög hasonló az APQ háromszöghöz, és $PG = \frac{1}{3}PQ$. Ugyanennyi a HQ szakasz is, tehát GH is harmada PQ -nak. Mivel GH éle K -nak, $GH = 1$, vagyis $PQ = 3$, az $ABPQ$ tetraéder szabályos.

Könnyen látható, hogy az így egyértelműen kapott testnek megvannak a kívánt tulajdonságai. Térfogata az $ABPQ$

tetraéder térfogatának $\left(1 - \frac{2}{27}\right)$ -szerese, tehát

$$V_K = \left(1 - \frac{2}{27}\right) \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2,946 \text{ térfogategység.}$$

Felszíne pedig az egységnyi oldalú szabályos háromszög területének

$2\{1 + (3^2 - 1) + (3^2 - 2)\} = 32$ -szerese, azaz $F_K = 8\sqrt{3} = 13,86$ területegység.

Kiss Katalin (Budapest, Dózsa Gy. Gimn., III. o. t.)