A szerkesztést a derékszögű koordináta-rendszerben fogjuk elvégezni. Az adott egyenesek közül e_1-nek az x tengely szerepét adjuk, e_3-nak az y tengelyét, ekkor e_2 és e_4 a síknegyedek felezői; vegyük az e_1-et e_2-be vivő 45°-os elfordulás irányát pozitívnak, ekkor e_2 az $y = x$ egyenletű egyenes, e_4 egyenlete pedig $y = -x$. Jelöljük a szerkesztendő k kör sugarát r-rel, C középpontjának koordinátáit u-val, v-vel.

A tengelyekből kimetszett húrok hosszára

$$h_1 = a = 2\sqrt{r^2 - v^2}, \quad h_3 = b = 2\sqrt{r^2 - u^2},$$

tehát

$$v^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}, \quad u^2 = r^2 - \frac{b^2}{4}, \quad r^2 = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2 + b^2}{8}, \tag{1}$$

és így k egyenlete, r kiküszöbölésével

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = (x^2 + y^2) - 2(ux + vy) + \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{a^2 + b^2}{8} = 0. \tag{2}$$

Innen $y = x$ helyettesítéssel azt az egyenletet kapjuk, amelyet a h_2 húr végpontjaihoz tartozó abszcisszák elégítenek ki:

$$x^2 - (u+v)x + \frac{u^2 + v^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{16} = 0.$$

Ebből elég felírnunk a két gyök (x_1 és x_2) különbségének abszolút értékét, mert azt $(\cos 45^\circ)$-kal osztva, mindjárt megkapjuk a h_2 húr hosszát. Mivel x^2 együtthatója 1, azért $|x_2 - x_1|$-et a D díszkrimináns négyzetgyöke adja. Ehhez

$$D = (u+v)^2 - (u^2 + v^2) + \frac{a^2 + b^2}{4} = 2uv + \frac{a^2 + b^2}{4},$$

$$h_2 = \sqrt{2} \cdot |x_2 - x_1| = \sqrt{2D} = \sqrt{4uv + \frac{a^2 + b^2}{2}}. \tag{3}$$

Hasonlóan, h_4 céljára (2)-be $y = -x$-et írva,

$$x^2 - (u-v)x + \frac{u^2 + v^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{16} = 0,$$

$$h_4 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - 4uv}. \tag{4}$$

Behelyettesítve (3)-at és (4)-et a $h_4 = 3h_2$ követelménybe, kellő alakítással

$$4(1^2 + 3^2)uv = (1^2 - 3^2)\,\frac{a^2 + b^2}{2}, \quad uv = -\frac{a^2 + b^2}{10}. \tag{5}$$

Ez az (1)-ből adódó

$$u^2 - v^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} \tag{6}$$

egyenlettel együtt rendszert alkot u és v meghatározására.

Látjuk (5)-ből, hogy u és v ellentett előjelűek lesznek, tehát C a II. vagy a IV. síknegyedben van. Helyesebben: ha van megoldás, akkor mindegyikben, hiszen az origóra való tükrözés az adott egyeneseket önmagukba viszi át, tehát k-val együtt O-ra való tükörképe is megoldás. Elég tehát megszerkesztenünk azt a C középpontot, melyre $u < 0$ és $v > 0$.

Kiszámítjuk u^2-et és v^2-et. (5)-ből v-t (6)-ba helyettesítve

$$u^4 - \frac{a^2 - b^2}{4}u^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{10}\right)^2 = 0,$$

és mivel innen u^2 kisebbik értéke negatív, (hiszen a két érték szorzata negatív), azért egyértelműen

$$\begin{cases} u^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{8} + \sqrt{\left(\dfrac{a^2 - b^2}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{a^2 + b^2}{10}\right)^2} (> 0), \\ v^2 = \dfrac{b^2 - a^2}{8} + \sqrt{\left(\dfrac{a^2 - b^2}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{a^2 + b^2}{10}\right)^2} (> 0). \end{cases} \tag{7}$$

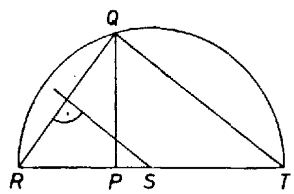
Innen is, de már (5), (6)-ból is látjuk, hogy $|u|$ és v nagyságviszonya ugyanaz, mint a és b nagyságviszonya, továbbá a és b cseréjével u^2 és v^2 értéke csupán fölcserélődik. Ezek alapján szabad a szerkesztést úgy leírnunk, mintha $a \geq b$ volna.

(7)-ben a négyzetgyökjel alatt az adott a, b szakaszoknak 4-edfokú kifejezése áll, ami egyben két négyzet összege. Megszerkeszthetnénk a négyzetgyököt és még u^2-et, v^2-et is, ha előzőleg szakaszokként állítanánk elő az

$$\frac{a^2-b^2}{8} \quad \text{és} \quad \frac{a^2+b^2}{10} \tag{8}$$

kifejezéseket (amelyek elsődlegesen egy-egy területet jelentenek).

Egy $PQ = x$ szakaszhoz x^2 hosszúságú szakasz szerkesztése (többek között) a magasságával kettévágott derékszögű háromszög arányos szakaszainak felhasználásával lehetséges, amennyiben egy tetszőleges szakaszt hosszúságegységnek nyilvánítunk. PQ-ra merőlegesen felmérjük $PR = 1$-et, a PR egyenesből előbb a QR szakasz felező merőlegesével kimetsszük S-et, majd az S körüli SR sugarú körrel T-t, ekkor $PT = PQ^2 : PR = PQ^2 = x^2$ (1. ábra).



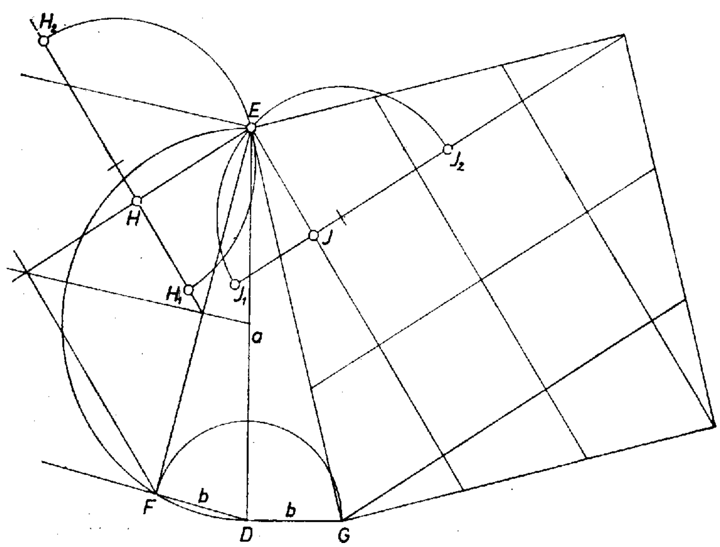
1. ábra

Az ábra alapján világos, hogy megfordítva hogyan kapjuk az $1 = PR$ és $x^2 = PT$ szakaszokból a $PQ = x$ szakaszt.

Nem kell ezt az eljárást a-val és b-vel kezdenünk, mert a (8) kifejezések négyzetgyökét rövidebben kapjuk az alábbiak szerint. Szerkesszünk DEF derékszögű háromszöget, $DE = a$ átfogóval, $DF = b$ befogóval (2. ábra), így a

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2-b^2)}$$

szakaszt megadja az EF befogó mint oldal fölé szerkesztett négyzet átlójának 1/4 része, EH. – Szerkesszünk másrészt DEG derékszögű háromszöget $DE = a$ és $DG = b$ befogókkal, és az EG átfogó fölé szerkesztett négyzet oldalait osszuk $3-3$ egyenlő részre.



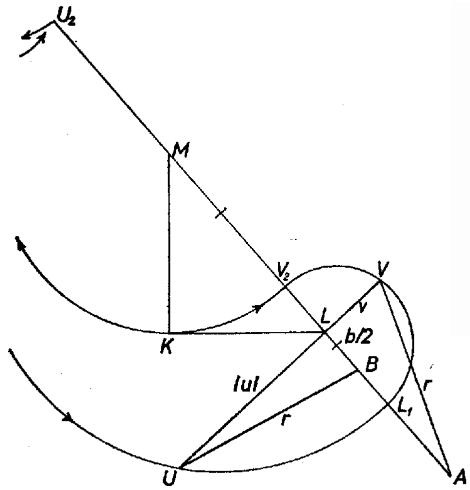
2. ábra

Könnyű belátni, hogy az ábra szerinti $3+3$ összekötő szakasz olyan részekre osztja a négyzetet, melyekből 10 egybevágó négyzet állítható össze, tehát egy kis négyzet oldala

$$EJ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{10}}.$$

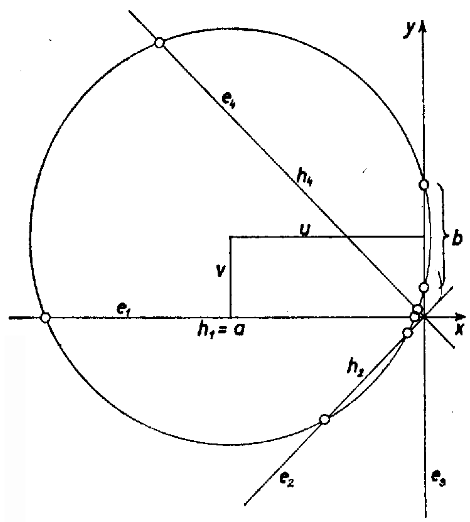
Ezek alapján az 1. ábrán bemutatott szerkesztést x helyén EH-ra és EJ-re alkalmazva – egységnek vettük $HH_1 = JJ_1 = DF$-et –, az x^2 szerepében kapott HH_2 és JJ_2 adják a (8) kifejezéseknek megfelelő szakaszokat.

Legyenek most a KLM derékszögű háromszög befogói $KL = JJ_2$, $KM = HH_2$ (3. ábra), messe az M körüli, MK sugarú kör az LM átfogót V_2-ben, meghosszabbítását U_2-ben, ekkor LU_2 és LV_2 a (7) szerint u^2-nek, v^2-nek megfelelő szakasz.



3. ábra

Mérjük fel az átfogó L-en túli meghosszabbítására $LL_1 = HH_1$-et, írjunk félköröket L_1U_2 és L_1V_2 mint átmérő fölé és messük ezeket az L-ben emelt merőlegessel U-ban, V-ben, ekkor $LU = |u|$ és $LV = v$ a keresett k kör C középpontjának koordinátái. Végül mérjük fel LL_1-re $LA = a/2$-t, $LB = b/2$-t, ekkor $VA = UB = r$ a k-kör sugara. – Mindezek alapján az eredményt a 4. ábra mutatja.



4. ábra

A végzett szerkesztési lépések mindig egyértelműen végrehajthatók voltak.

A szerkesztés helyességének bizonyítását hely hiányában az olvasóra kell hagynunk.

Megjegyzések. 1. Egyszerűsíthető a szerkesztés, h a hosszúságegységnek magát HE-t vesszük; ekkora 2. ábrán H_1, H_2 elmarad.

2. Kézenfekvő lenne a 2. ábrán EJ szerkesztését alkalmi fogásnak minősíteni, szemben EH nyilvánvaló szerkesztésével. Pedig – ha a $h_4 : h_2 = 3 : 1$ aránypár adott értékétől eltekintünk – EJ szerkesztése mindig alkalmazható, amíg $h_4 : h_2 = \lambda$ egész szám, és akkor is, ha λ racionális szám. Azon múlik ez, hogy a négyzetnek $(\lambda^2 + 1)$ számú egybevágó négyzetre való darabolását végezzük így.[1] Ezzel szemben $EH = (a^2 - b^2)/8 = (a^2 - b^2)/(3^2 - 1^2)$ szerkesztése alkalmi fogás, a $3^2 - 1^2 = 8$ speciális értékre támaszkodik; általában négyzetnek $(\lambda^2 - 1)$ számú egybevágó négyzetre osztása nehézkesebb.

[1]Lásd 1142. gyakorlatunk megoldását K. M. L. 36. (1968) 117. old. Egyéb efféle darabolásokra vonatkozóan lásd az 50. kötet 3. számához mellékelt Tárgymutató X. oldalát.