

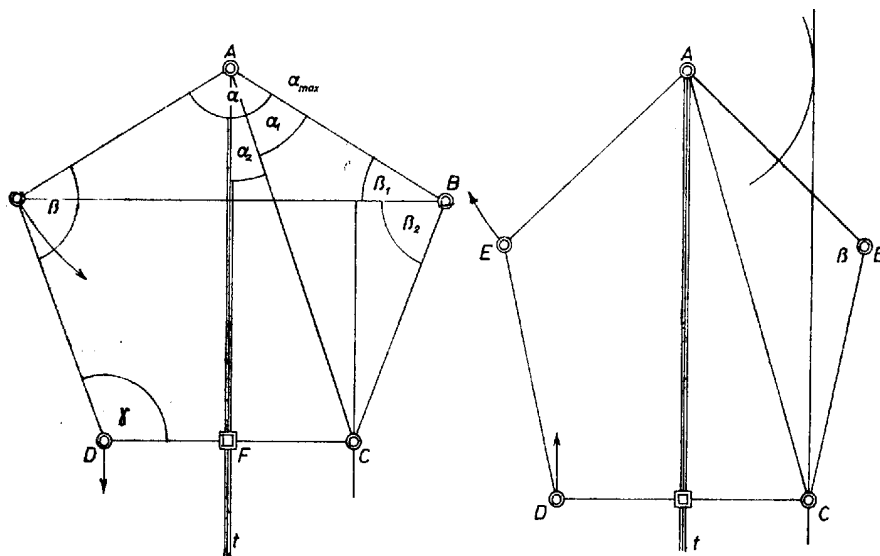
Legyen egy, a föltevés szerinti ötszög $ABCDE$. A t szimmetriatengely átmegy az egyik csúcson, ugyanis a tükrözés vagy párokba kapcsolja a csúcsokat vagy – ha egy csúcs rajta van a t -n – ezt önmagába viszi át. Az ötszög egyik csúcsa az utóbbi típusú, mert az 5 páratlan szám.

Válasszuk úgy a betűzést, hogy t az A -n menjen át, így t merőlegesen felezi a CD oldalt és a BE átlót, elég tehát a C -nél levő γ , a B -nél levő β , valamint az A -nál levő α szög korlátait vizsgálnunk.

A Gy. 1526 (H) gyakorlatban¹ bebizonyítottuk, hogy a szóban forgó ötszögek mindegyik szöge tompaszög – tekintet nélkül arra, hogy van-e tengelyük – tehát a 90° mindenestre el nem érhető alsó korlátja mind a három szögnek. Eszerint a $BCDE$ szimmetrikus trapézban $BE > CD$.

Könnyű látni, hogy t és rajta A helyzetét, valamint AB -t és α -t megválasztva, megszerkeszthető B , majd a t -től $AB/2$ távolságban haladó egyenesen C , vagyis az ötszöget (β -t és γ -t) lényegében egyedül α meghatározza. Hasonlóan t , az erre tükrös C , D pontpár és $\gamma(> 90^\circ)$ megválasztásával kijelölhető B , majd A . Végül β megválasztása is meghatározza α -t és γ -t: a BAC háromszög fölvétele után C -ből érintőt szerkesztünk az A körül $AB/2$ sugárral rajzolt körhöz (úgy, hogy B -t válassza el a körtől), ez adja t irányát.

Vezessük be még az $ABE \sphericalangle = \beta_1$, $EBC \sphericalangle = \beta_2$, $BAC \sphericalangle = \alpha_1$ és $CAF \sphericalangle = \alpha_2$ jelöléseket, ahol F a CD oldal t -n levő pontja.



A konvexitás miatt $\beta = \beta_1 + \beta_2$ és $\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:

$$\beta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 &= \frac{BE - CD}{2 \cdot BC} = \frac{2 \cdot BA \sin \frac{\alpha}{2} - BA}{2 \cdot BA} = \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}, \\ \cos \gamma &= \cos(180^\circ - \beta_2) = \frac{1}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Az α szög felveheti megengedett legnagyobb értékét, a 120° -ot, mert ekkor $\beta_1 = 30^\circ$, $\beta_2 = 68^\circ 32'$, $\beta = 98^\circ 32'$ és $\gamma = 111^\circ 28'$, megengedett értékek.

Csökkentve ebben az értékrendszerben α -t, vele β_1 szigorúan monoton növekszik és β_2 is – hiszen $\cos \beta_2$ szigorúan monoton csökken –, másrészt γ szigorúan monoton csökken, mert $\cos \gamma$ szigorúan monoton növekszik; eszerint

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= 120^\circ, \quad \beta_{\min} = 98^\circ 32' \quad (\text{fölkerekítve}), \\ \gamma_{\max} &= 111^\circ 28' \quad (\text{lekerekítve}). \\ (\cos \beta_{\min} &= (3 - \sqrt{3} - \sqrt[4]{12})/4). \end{aligned}$$

Legfeljebb addig csökkenhet α , amíg β a látott növekedésben eléri a 120° -ot – ha egyáltalán eléri. Elérhető a $\beta = 120^\circ$ érték, mert akkor $\alpha_1 = 30^\circ$, $AC = \sqrt{3}AB$, és $\sin \alpha_2 = \frac{CD}{2 \cdot AC} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ alapján $\alpha_2 = 16^\circ 47'$, ezekből $\alpha = 93^\circ 34'$, másrészt $\gamma = 103^\circ 13'$, megengedett értékek. Ezek szerint

$$\beta_{\max} = 120^\circ \quad \text{és} \quad \alpha_{\min} = 93^\circ 34',$$

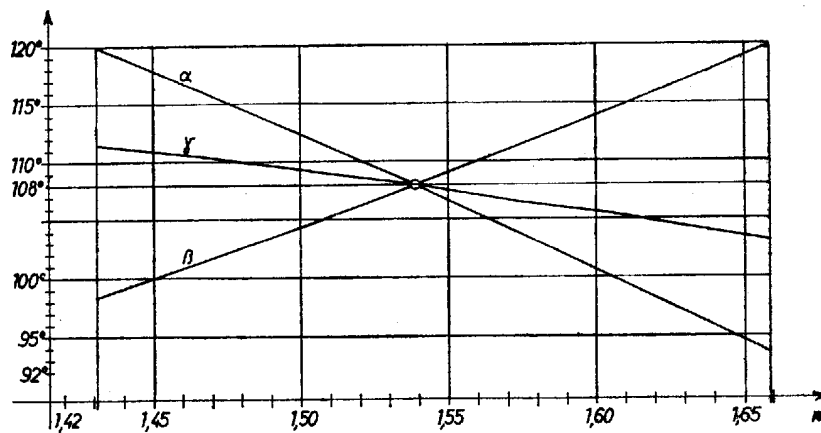
¹ Megoldását lásd K.M.L. 49 (1974) 145.

hiszen a fentebbieket megfordítva, α ezt az értéket α_1 és α_2 szigorúan monoton csökkenésével érte el (ami a β alapján végzett szerkesztésből is kiolvasható); továbbá a talált γ érték megadja a $\gamma_{\min}$ értéket, hiszen α és γ – mint láttuk egyirányúan változnak: $\gamma_{\min} = 103^\circ 13'$.

Mindezek szerint válaszunk:

$$93^\circ 34' \leq \alpha \leq 120^\circ, \quad 120^\circ \geq \beta \geq 98^\circ 32', \quad 103^\circ 13' \leq \gamma \leq 111^\circ 28'.$$

Ábráink mechanikus modellt vázolnak az ötszögről a két szélső helyzetben : az $A, \dots, E$ csúcsokban csuklók kapcsolják össze az egyenlő oldalakat, a tengelyt realizáló sínen A rögzítve van, F pedig csúszik, CD -t állandóan merőleges állásban tartja.



Grafikonunk a szögek változását ábrázolja az $AF = m$ magasság függvényében; látjuk, hogy α , β és γ egyszerre válik egyenlővé a szabályos ötszög esetében.