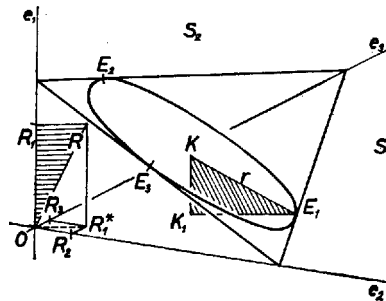


Jelöljük a körlemez k -val, középpontját K -val, sugarát r -rel a szóban forgó szöglet csúcsát O -val, határoló síkjait rendre S_1 -gyel, S_2 -vel, S_3 -mal, k síkját S -sel, k -nak S_i -n levő érintési pontját E_i -vel, K -nak S_i -n levő vetületét K_i -vel, az O -n átmenő, S_i -re merőleges egyenest e_i -vel ($i = 1, 2, 3$), és az O -n átmenő, S -re merőleges egyenest e -vel. Mérjük fel O -ból e -re valamelyik irányban r -t, a kapott végpontot jelöljük R -rel. Fekteszünk R -en át S_i -vel párhuzamos síkot, messe ez e_i -t R_i -ben ($i = 1, 2, 3$; lásd az 1. ábrát).



1. ábra

A következő megállapítások az $i = 1, 2, 3$ értékek mindegyikére érvényesek. Mivel k érinti az S_i síkot, S és S_i különbözőek, emiatt K_i különbözik K -tól és R_i különbözik R -tól. Ha $S \perp S_i$, akkor K_i , azonos E_i -vel, és R_i azonos O -val. Különbözik a K , E_i , K_i és az R , O , R_i pontok valódi háromszögeket határoznak meg. Ezekben K_i -nél, illetve R_i -nél derékszög van, és az elsőnek E_i -nél levő szöge egyenlő a másodiknak O -nál levő szögével, hiszen e szögek szárai merőlegesek, és mindkét szög hegyesszög. Emiatt

$$(1) \quad OR_i = E_i K_i \quad \text{és} \quad OR_i^2 + R_i R^2 = E_i K_i^2 + K_i K^2 = r^2.$$

Könnnyen látható, hogy (1) az $S \perp S_i$, esetben is érvényes, hiszen ekkor $OR_i = E_i K_i = 0$.

Jelöljük R -nek S_1 -en levő vetületét R_1^* -gal, ekkor

$$(2) \quad OR^2 = OR_1^{*2} + R_1^* R^2 = OR_2^2 + OR_3^2 + OR_1^2.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$OK^2 = KK_1^2 + KK_2^2 + KK_3^2,$$

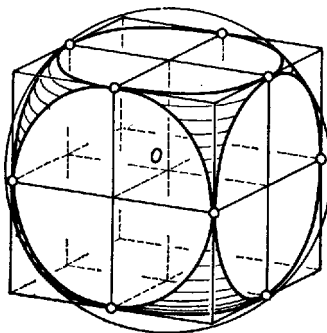
amiből (1) és (2) alapján

$$\begin{aligned} OK^2 &= (r^2 - E_1 K_1^2) + (r^2 - E_2 K_2^2) + (r^2 - E_3 K_3^2) = \\ &= 3r^2 - (OR_1^2 + OR_2^2 + OR_3^2) = 3r^2 - OR^2 = 2r^2. \end{aligned}$$

Ha tehát K a mértani helyhez tartozik, akkor

$$(3) \quad OK^2 = 2r^2, \quad 0 < KK_1, KK_2, KK_3 \leq r.$$

Ezek szerint K rajta van az O középpontú, $\sqrt{2}r$ sugarú G gömbön, de az S_1, S_2, S_3 síktól mért távolsága nem lehet r -nél nagyobb. Az utóbbi feltétel arra az O centrumú, $2r$ élű $\mathbf{K}$ kocka pontjaira teljesül, amelynek lapjai rendre párhuzamosak S_i -vel, így a G -n levő pontok közül el kell hagynunk a $\mathbf{K}$ -n kívül levőket, valamint az S_i síkok pontjait. Jelöljük a visszamaradó pontok halmazát G_0 -lal, megmutatjuk, hogy ennek minden pontja a vizsgált mértani helyhez tartozik (2. ábra).



2. ábra

Legyen K tetszőleges pont a térben, melyre teljesül (3), ahol K_i a K -nak az S_i -n levő vetülete ($i = 1, 2, 3$). Tekintsük az S_1, S_2, S_3 síkok által határolt 8 térrész közül azt a térnycadot, amelyik tartalmazza K -t. Mériük fel az e_i egyenesre ebben a térnycadban az

$$OR_i = \sqrt{r^2 - K_i K^2}$$

szakaszokat, és húzzunk az R_i ponton át S_i -vel párhuzamos síkot ($i = 1, 2, 3$). Jelöljük a három új sík metszéspontját R -rel, erre (3) miatt

$$OR^2 = OR_1^2 + OR_2^2 + OR_3^2 = r^2,$$

tehát

$$RR_1 = KK_1, \quad RR_2 = KK_2, \quad RR_3 = KK_3.$$

Fektessük át K -n OR -re merőleges S síkot. A következő megállapításaink ismét érvényesek lesznek az $i = 1, 2, 3$ értékek mindegyikére. Mivel $KK_i > 0$, és $OR_i < r$, vagyis R_i különbözik R -tól, tehát S nem lehet párhuzamos S_i -vel. Jelöljük S és S_i metszészonalát m_i -vel, K -nak m_i -n levő merőleges vetületét E_i -vel. Mivel $OR \perp KE_i$, és $RR_i = KK_i$, azért az ORR_i, E_iKK_i háromszögek ismét egybevágók (esetleg bennük egyszerre O az R_i -vel, E_i a K_i -vel azonos), tehát

$$KE_i = OR = r,$$

vagyis az S síkban K körül r sugárral rajzolt k kör érinti az m egyenest. K tehát valóban a mértani helyhez tartozik.

Megjegyzés. Megoldásunk második felében elég volt k -nak egy megfelelő állását megtalálnunk. Hogy ennek megfelelően csak egyet adtunk meg, az még nem jelenti azt, hogy csak egy van. Általában a megfelelő körök száma négy, kivéve, ha K a $\mathbf{K}$ kocka, felületén van, ekkor a helyzetek száma csak kettő.