

**I. megoldás. 1.** A  $PP'$  egyenes iránytangense az adott összefüggések felhasználásával

$$m = \frac{b' - b}{a' - a} = \frac{0,8a - 1,6b}{-0,4a + 0,8b} = -\frac{0,8}{0,4} \cdot \frac{a - 2b}{a - 2b} = -2,$$

állandó, hacsak a nevezőre teljesül

$$a' - a = -0,4(a - 2b) \neq 0.$$

Ez a követelmény első alakjában azt jelenti, hogy  $P'$  és  $P$  abszcisszái különbözők, második alakjában pedig azt, hogy  $a - 2b \neq 0$ , másképpen  $a \neq 2b$ , vagyis  $P$  abszcisszája és ordinátája közt kizártunk egy első fokú kapcsolatot. Általában az  $x = 2y$ , vagy  $y = \frac{1}{2}x$  kapcsolat a koordináta-rendszerben egy meghatározott  $t$  egyenest jelent, azt kaptuk tehát, hogy ha  $P$  nincs rajta  $t$ -n, akkor  $PP'$  iránytényezője 2.

Ha viszont  $a' - a = 0$ , azaz  $a' = a$  és  $a = 2b$ , vagyis  $P$  rajta van  $t$ -n, akkor (1) alapján

$$b' = 1,6b - 0,6b = b,$$

vagyis  $P'$  azonos  $P$ -vel, hiszen mindkét koordinátájuk egyenlő. Ekkor pedig nincs értelme beszélni összekötő egyenesükről.

Ezek szerint a  $P, P'$  kapcsolatban – nevezhetjük ponttranszformációnak – valóban minden  $P' \neq P$  esetén a  $PP'$  egyenes párhuzamos az  $m = -2$  iránytényezőjű egyenesek mindegyikével, speciálisan az origón átmenő,  $y = -2x$  egyenletű  $i$  egyenessel; az állítást bebizonyítottuk.

Például az  $(1; 0)$  pont leszarmazottja  $(0,6; 0,8)$ , a  $(0; 1)$  ponté  $(0,8; -0,6)$ , a  $(3; 4)$ -é  $(5; 0)$ .

Azt is kaptuk, hogy az (1) egyenletrendszerrel leírt transzformációban az  $y = \frac{1}{2}x$  egyenletű  $t$  egyenes pontjai – és csak ezek – megkülönböztetett szerepet játszanak (hiszen más pontpárokra mindjárt  $a' \neq a$ ), ezek önmaguk leszarmazottjai.

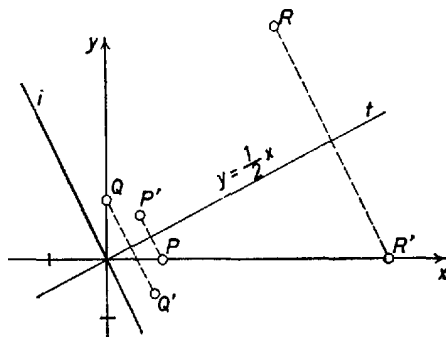
2. Keressük meg most a  $P$ -ből leszarmaztatott  $P'$ -nek  $P''$  leszarmazottját,  $P$ -nek második leszarmazottját (a  $t$ -n levő  $P$  pont esetében  $P' \equiv P$  miatt természetesen  $P'' \equiv P$ ).

Erre

$$a'' = 0,6a' + 0,8b' = 0,6(0,6a + 0,8b) + 0,8(0,8a - 0,6b) = a,$$

és hasonlóan  $b'' = b$ , vagyis  $P'$  leszarmazottja maga  $P$ .

Hozzávéve ehhez azt az észrevételt, hogy  $t$  merőleges  $i$ -re, vagyis minden  $P, P'$  pontpár összekötő egyenesére, kézenfekvő az a sejtés, hogy az (1) rendszer az  $y = \frac{1}{2}x$  egyenesre való tükrözés.



Ennek bizonyításához most már elég azt belátni, hogy a  $PP'$  szakasz felezőpontja a  $t$ -n van, vagyis hogy ordinátája feleakkora, mint az abszcisszája. Valóban:

$$\begin{aligned} \frac{a + a'}{2} &= 0,8a + 0,4b, \\ \frac{b + b'}{2} &= 0,4a + 0,2b, \end{aligned}$$

tehát sejtésünk igaz.

**II. megoldás.** Jelöljük a síknak a koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorait  $\mathbf{i}$ -vel,  $\mathbf{j}$ -vel, az origót  $O$ -val, akkor a  $P$  pont helyvektora

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j},$$

és a  $P$ -hez rendelt  $P'$  pont helyvektora

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{OP'} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} = (0,6a + 0,8b)\mathbf{i} + (0,8a - 0,6b)\mathbf{j} = a(0,6\mathbf{i} + 0,8\mathbf{j}) + b(0,8\mathbf{i} - 0,6\mathbf{j}).$$

Ebből  $a = 1$ ,  $b = 0$ , illetve  $a = 0$ ,  $b = 1$  helyettesítéssel kapjuk az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  vektorok transzformált értékeit:

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{i}' &= 0,6\mathbf{i} + 0,8\mathbf{j} \\ \mathbf{j}' &= 0,8\mathbf{i} - 0,6\mathbf{j}, \end{aligned}$$

Ezeket az  $\mathbf{r}'$  előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{i}' + b\mathbf{j}'.$$

Szavakkal elmondva ez azt jelenti, hogy a transzformált  $P'$  pontnak a transzformált  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  vektorok által meghatározott koordináta-rendszerben ugyanazok a koordinátái, mint az eredeti  $P$  pontnak az eredeti koordináta-rendszerben. Elég tehát azt megvizsgálnunk, hogyan kaphatjuk meg az  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  vektorokat az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  vektorokból. Mivel a (2)-beli együtthatókra

$$0,6^2 + 0,8^2 = 1,$$

azért  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  is egységvektor. Másrészt  $\mathbf{j}'$  az  $\mathbf{i}'$ -ből negatív irányú  $90^\circ$ -os forgatással kapható meg, hiszen ez a forgatás  $(0,6\mathbf{i})$ -t  $(-0,6\mathbf{j})$ -be,  $(0,8\mathbf{j})$ -t  $(0,8\mathbf{i})$ -be viszi, és e két vektor összegét az új vektorok összegébe viszi. Ha tehát megkeressük azt a  $t$  egyenest, amelyre  $\mathbf{i}$ -t tükrözve  $\mathbf{i}'$ -t kapjuk, biztosak lehetünk benne, hogy az  $\mathbf{i}$ -ből pozitív irányú  $90^\circ$ -os forgatással kapható  $\mathbf{j}$ -t erre a  $t$ -re tükrözve az  $\mathbf{i}'$ -ből negatív irányú  $90^\circ$ -os forgatással kapható  $\mathbf{j}'$ -t kapjuk.

Mivel  $\mathbf{i}'$  is egységvektor,  $t$  valóban létezik, mégpedig  $t$  az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}'$  vektorok által kijelölt szöveget felező egyenes. A  $t$ -re való tükrözés az  $\mathbf{i}$  vektor  $a\mathbf{i}$  skalár-szorosát az  $\mathbf{i}$ -nek  $\mathbf{i}'$  képéből kapható  $a\mathbf{i}'$  vektorba viszi,  $b\mathbf{j}$ -t pedig  $b\mathbf{j}'$ -be, és  $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$ -t  $(a\mathbf{i}' + b\mathbf{j}')$ -be, hiszen a vektorok összeadásához használt paralelogramma is tükröződik  $t$ -re. Ezzel beláttuk, hogy az (1) összefüggéssel megadott ponttranszformáció azonos a  $t$  egyenesre való tükrözéssel, ahol  $t$  az origón, és az  $(1; 0)$ ,  $(0,6; 0,8)$  pontpár  $(0,8; 0,4)$  felezőpontján átmenő

$$y = \frac{1}{2}x$$

egyenletű egyenes.

*Megjegyzés.* Ha (1) helyett az általános

$$a' = c_{11}a + c_{12}b; \quad b' = c_{21}a + c_{22}b$$

összefüggésből indultunk volna ki, az

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= c_{11}\mathbf{i} + c_{21}\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}' &= c_{12}\mathbf{i} + c_{22}\mathbf{j} \end{aligned}$$

vektorokat kaptuk volna, amelyek általában már nem merőlegesek, és nem egységvektorok. Az azonban továbbra is igaz marad, hogy tetszőleges  $(\mathbf{i}; \mathbf{j})$ -beli pont képe a vele megegyező koordinátájú,  $(\mathbf{i}'; \mathbf{j}')$ -beli pont. A transzformációnk által adott képek tehát úgy viszonylanak az eredetihez, mint egy bizonyos összefüggésnek különböző koordináta-rendszerekben kapott képei.

Mondjuk, az  $y = x^2$  összefüggést ábrázoljuk különböző koordináta-rendszerekben, azaz tetszőleges  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  vektorok mellett megkeressük az

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u} + x^2\mathbf{v}$$

helyvektorú pontok összeségét, midőn  $x$  befutja a valós számokat. Amíg az  $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$  vektorok merőlegesek, és egységnyi hosszúak, megválasztásuk nem szól bele a kapott pontokból kirajzolódó görbe alakjába. Ha azonban  $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$  tetszőleges vektorok, a vizsgált görbék alakja is megváltozik.

További általánosítást jelent, ha az origó helyzetét is megváltoztatjuk, amit az

$$\begin{aligned} a' &= c_{11}a + c_{12}b + c_{13} \\ b' &= c_{21}a + c_{22}b + c_{23} \end{aligned}$$

transzformációval érhetünk el. Jó szolgálatot tesznek ezek a transzformációk a bonyolultabb függvények alaki vizsgálatánál, segítségükkel ezeknek a tipizálása aránylag kényelmesen elvégezhető.

Külön említésre méltóak az

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

egyenletű ún. másodrendű görbék, amelyekről e transzformációk segítségével lehet belátni, hogy valamennyiük kúpszélet, tehát a fenti egyenlet képe vagy ellipszis, vagy hiperbola, vagy parabola, vagy metsző egyenespár, vagy párhuzamos egyenespár, vagy egy egyenes, vagy egy pont, vagy üres halmaz (a kört e felsorolásban az ellipszisekhez soroltuk).