

$$(1) \quad \sin \alpha \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

vagyis az ezt kielégítő D pont mellett a szögekre teljesül, hogy

$$(5) \quad \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \sin \alpha \sin \beta \quad \text{és} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.$$

Mármost

$$\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \frac{1}{2} [\cos (\gamma_1 - \gamma_2) - \cos (\gamma_1 + \gamma_2)] \leq \frac{1}{2} [1 - \cos \gamma] = \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

ezt (5)-tel egybevetve (1)-et kapjuk.

Ezzel beláttuk, hogy ha a mondott tulajdonságú D pont létezik, akkor teljesül (1). Tegyük most fel, hogy a háromszög szögeire teljesül (1). Ekkor van olyan δ szög, amelyre $0 \leq \delta \leq \pi$, és

$$\cos \delta = 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma,$$

hiszen itt a jobb oldal értéke mindig legalább -1 , és (1) teljesülése esetén

$$2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \leq 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma = 1.$$

Mivel erre a δ szögre $\cos \delta > \cos \gamma$, és így $\delta < \gamma$, azért a

$$\gamma_1 = \frac{\gamma - \delta}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

szögek pozitívak, és rájuk teljesül (5). A fenti gondolatmenet megfordításával viszont ebből azt kapjuk, hogy a γ_1, γ_2 szögekhez tartozó D pontra CD az AD, BD szakaszok mértani közepe, (1) tehát valóban elégséges feltétele az ilyen D pont létezésének.

Krausz Tamás (Debrecen, Fazekas M: Gimn., IV. o. t.)