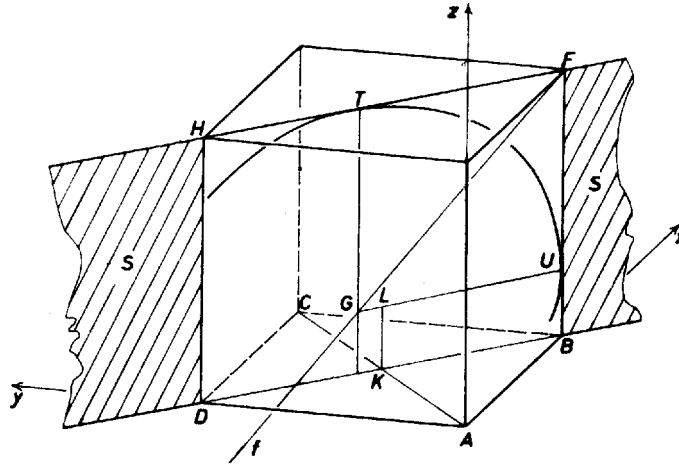


A keresett gömb G középpontja az AC alapátló S felező merőleges síkjában van, ami másképpen a BD átlón átmenő függőleges sík. Ez a sík merőleges a kocka fedőlapjának V síkjára, ezért V és a gömb T érintkezési pontja rajta van a két sík metszésvonalán, ami a fedőlapon a BD -vel párhuzamos és egyirányú FH átló egyenese. Mondhatjuk eszerint, hogy a gömb érinti az FH egyenest. G alatta van V -nek (FH -nak), hiszen a gömbfelület A pontja alatta van V -nek (ld. az ábrát).



Jelölésünk szerint a gömb az FB élegyenest érinti egy U pontban. És mivel FB is az S -ben van, azért az S -ben az FH egyenest T -ben és az FB félegyenest U -ban érintő kör a gömbnek főköre. Ez egyszersmind a gömbnek S -en levő merőleges vetülete, emiatt *belső* pontként tartalmazza A -nak és C -nek S -re való vetületét; ezek egybeesnek egymással és a BD átló K felezőpontjával. Emiatt G az S -nek csak a D -t tartalmazó BFH derékszög-tartományában lehet, ennek f szögfelezőjén.

A gömb r sugarát a $GT = GU = GA$ követelményből határozzuk meg. Legyen még K vetülete GU -ra L , így

$$GA^2 = GL^2 + LK^2 + KA^2, \quad \text{ahol}$$

$$GL = |GU - LU| = |r - KB| = \left| r - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|,$$

$$LK = UB = |FB - FU| = |1 - r|, \quad KA = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ezekkel

$$r^2 = \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + (1 - r)^2 + \frac{1}{2},$$

$$r^2 - (2 + \sqrt{2})r + 2 = 0,$$

mindkét gyök pozitív, megfelel: $r_1 = 0,751$ (ez van az ábrán), $r_2 = 2,663$.

Böősi Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Alább egy olyan utat vázolunk a kérdés megválaszolására, amely a térbeli koordináta-geometria fogalmait, összefüggéseit, eljárásait használja fel. Előrebocsátjuk, hogy az efféle dolgozatokat – pontverseny-kiírásunk szellemében – csak megoldásvázlatoknak tekinthetjük. Látni fogjuk, hogy ha csak némi magyarázatot fűzünk a síkból formálisan leutáncolt lépésekhez, mindjárt terjedelmesebb a megoldás a fenténél, itt nem könnyít a koordináta-geometria.

Helyezzük el a kockát a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy alaplapja csúcsainak koordinátái

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, 0, 0), \quad C(1, 1, 0), \quad D(0, 1, 0)$$

legyenek. Legyen másrészt a gömb G középpontja az (a, b, c) pont, sugara r . Így a gömb egyenlete

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

ti. ezt elégítik ki a gömb minden felületi pontjának (x, y, z) koordinátái.

Mármost, mivel a gömb átmegy az A és a C ponton, azért teljesül

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = r^2,$$

$$(2) \quad (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + c^2 = r^2.$$

A kocka B -n átmenő oldaléle párhuzamos a z tengellyel, az élegyenes minden pontjának első két koordinátája egyezik B első két koordinátájával, a harmadik tetszőleges: $(1; \cdot; 0; z)$. Az élegyenes és a gömb U érintkezési pontjára nézve a GU sugár merőleges az élre, tehát párhuzamos az x, y tengelyek alkotta síkkal, így U harmadik koordinátája c . Az $U(1, 0, c)$ pont rajta van a gömbön, tehát

$$(3) \quad (1 - a)^2 + b^2 = r^2.$$

A kocka fedőlapsíkjának egyenlete $z = 1$. A G középpont alatta van ennek, mert a gömb A és C pontjai alatta vannak a fedőlapnak, így $c < 1$. A fedőlapsík és a gömb érintkezési pontját T -vel jelölve T koordinátái: $(a, b, 1)$, hiszen GT sugár merőleges a fedősíkra, párhuzamos a z tengellyel. Így az előjelre is helyesen

$$(4) \quad \overline{GT} = 1 - c = r.$$

Mármost az (1) – (4) egyenletrendszerből úgy kapjuk a keresett r -et, hogy kiküszöböljük G koordinátáit. (4)-ből

$$(5) \quad c = 1 - r.$$

(1)-ből kivonva (2)-t, rendezés után

$$(6) \quad a + b = 1$$

(ez fejezi ki, hogy G benne van a B -n és D -n átmenő, a z -tengellyel párhuzamos síkban).

(1)-ből (3)-at kivonva, majd (5)-öt helyettesítve, rendezés után

$$(7) \quad a = r - \frac{r^2}{2},$$

és így (6)-ból

$$(8) \quad b = 1 - r + \frac{r^2}{2}.$$

Végül (7)-et, (8)-at és (5)-öt (1)-be helyettesítve rendezés után

$$r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 8r + 4 = 0.$$

A bal oldalt sikerül két négyzet különbségévé, és így szorzattá alakítani:

$$(r^2 - 2r + 2)^2 - (\sqrt{2}r)^2 = [r^2 - (2 + \sqrt{2})r + 2] \cdot [r^2 - (2 - \sqrt{2})r + 2] = 0.$$

Az első tényezőt 0-vá téve az I. megoldás egyenletét és gyökeit kapjuk, a második tényezőtől adódó egyenletnek viszont nincs valós gyöke, hiszen diszkriminánsa $(2 - \sqrt{2})^2 - 8 < 0$. – Ezzel a választ megadtuk.

A sugár ismeretében (7), (8) és (5) alapján a G középpont is megadható; r_1 -ből: $a_1 = 0,469$, $b_1 = 0,531$, $c_1 = 0,249$ és r_2 -ből $a_2 = -0,886$, $b_2 = 1,886$, $c_2 = -1,663$ (tulajdonképpen ezek a koordináták jelentenek segítséget a keresett gömb helyzetének elképzeléséhez).

U koordinátáinak megállapításához ezt is mondhattuk volna: a B oldalél az $x = 1$ egyenletű oldallapsík (az ábrán hátul) metszévonal az $y = 0$ egyenletű (jobb) oldallapsíkkal.

Kosztán Erzsébet (Kaposvár, Tánicsics M. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján, jelentős kiegészítésekkel