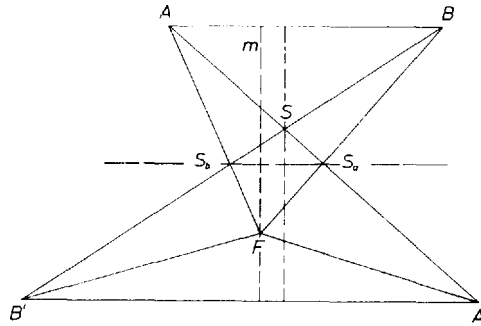


Áz állítást azzal bizonyíthatjuk be, hogy az $A'B'CD = T'$ tetraéder térfogata mindig $5/9$ része az $ABCD = T$ tetraéder térfogatának. Jelöljük az A -val szemben levő BCD lap súlypontját S_a -val, az ACD lap súlypontját S_b -vel, a CD él felezőpontját F -fel. Így FA, FB az ACD , illetve BCD lap egyik-egyik súlyvonala, azért S_b rajta van az FA -n, S_a pedig FB -n, tehát S_b, S_a és a velük B' és A' is benne van az $FAB = \Sigma$ síkban.



Gondoljuk kettémetszve T -t is, T' -t is a Σ síkkal, a metszet az FAB , ill. $F'A'B'$ háromszög. Az $FABC$ és $FABD$ tetraéderek térfogata egyenlő, mert alapsíknak a közös FAB lapjukat véve, magasságaik is egyenlők, hiszen F megválasztása folytán C és D egyenlő távolságra van Σ -tól, ennek két oldalán. Ugyanígy egyenlő T' két részének, $F'A'B'C$ -nek és $F'A'B'D$ -nek a térfogata is. És mivel e négy résznek a Σ -ra merőleges magasságai egyenlők, állításunk egyenértékű azzal, hogy az $F'A'B'$ alapháromszög területe egyenlő az FAB alapterületének $5/9$ részével. Feladatunk ezáltal síkbeli feladattá egyszerűsödött.

Az AS_a és BS_b egyenesek S metszéspontja (ami egyébként a T súlypontja) negyedeli az AS_a, BS_b szakaszt, mert benne van az ABS_aS_b négyszögben, továbbá $FS_b : FA = FS_a : FB = 1 : 3$ alapján $S_aS_b \parallel AB$ és $S_aS_b = AB/3$, az SS_aS_b háromszög $1/3$ arányú kicsinyített képe az SAB háromszögnek, $SS_a = SA/3$. Továbbmenve $SA' = SS_a + S_aA' = SS_a + S_aA = SS_a + 4SS_a = 5SS_a$, és ugyanúgy $SB' = 5SS_b$; ezért $A'B' \parallel S_aS_b \parallel AB$, és $A'B' = 5 S_aS_b = 5AB/3$.

Az FAB háromszög F -ből húzott magasságát m -mel jelölve F és S távolsága az S_aS_b egyenestől (ennek két oldalán) $\frac{m}{3}$, illetve $\frac{1}{4} \cdot \frac{2m}{3} = \frac{m}{6}$, tehát az $A'B'$ egyenestől az S pont $\frac{5m}{6}$, az F pont pedig $\frac{5m}{6} - \frac{m}{6} - \frac{m}{3} = \frac{m}{3}$ távolságra van.

Így az $A'B'F$ háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \frac{5AB}{3} \cdot \frac{m}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{ABm}{2}$$

Állításunkat bebizonyítottuk, ez pedig tartalmazza a feladat állítását, hiszen $5/9 > 1/2$.