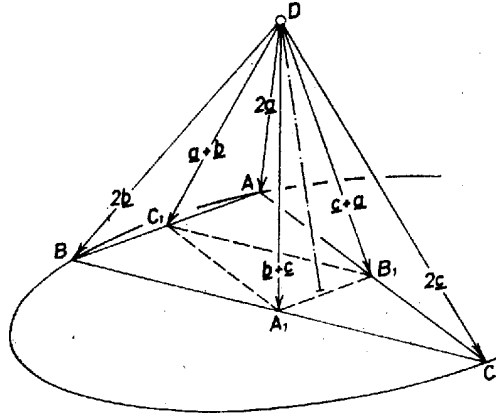


**I. megoldás.** Nem változik meg a felhasznált szögfelezők helyzete akkor – és így a vizsgálandó szögek értéke sem –, ha az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  csúcsok bármelyikét eltoljuk  $D$  felé (de úgy, hogy ne érje el  $D$ -t), vagy az ellentétes irányban. Ezért mindjárt abból indulhatunk ki, hogy  $DA = DB = DC = d$ , a gúla mindegyik oldallapja egyenlő szárú háromszög, tehát az  $ADB$ , a  $BDC$ , a  $CDA$  szög felezője átmegy rendre az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  alapélnak  $C_1$ ,  $A_1$ , illetve  $B_1$  felezőpontján.



A bizonyítandó állítás így ekvivalens avval, hogy véve az  $A_1DB_1$ , a  $B_1DC_1$  és a  $C_1DA_1$  szögek cosinusát, vagy mind a három érték negatívnak, vagy mind a három pozitívnak, vagy mind a három érték 0-nak adódik. A  $DA_1B_1$  háromszögből, felhasználva, hogy  $A_1B_1$  az  $ABC$  háromszög középvonala,  $A_1B_1 = C_1A = AB/2$ ,

$$\cos A_1DB_1 = \frac{DA_1^2 + DB_1^2 - A_1B_1^2}{2 \cdot DA_1 \cdot DB_1}.$$

Ennek előjele ugyanaz, mint az  $S$  számláló előjele, hiszen a nevező pozitív. Mármost

$$S = (DB^2 - A_1B^2) + (DC^2 - B_1C^2) - C_1A^2 = 2d^2 - \frac{1}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2),$$

és ez az előforduló betűkben szimmetrikus. Tehát a  $B_1DC_1$  és  $C_1DA_1$  szög cosinusának számlálója is  $S$ , az átfogalmazásunkban szereplő három cosinus érték csak a pozitív nevezőkben különbözik egymástól. Ebből már következik az átfogalmazott állítás, tehát az eredeti állítás is.

**II. megoldás.** A vektorok skaláris szorzatának alkalmazásával – lényegében az I. megoldás gondolatmenetét követve – még gyorsabban jutunk célhoz.

A  $D$  csúcsból indítsunk három egyenlő hosszú vektort az  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcsok felé. Jelöljük ezeket rendre  $2\mathbf{a}$ ,  $2\mathbf{b}$ ,  $2\mathbf{c}$ -vel. Mivel  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ , a feladatban szereplő szögfelezők irányába mutató vektorok  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{c}$  és  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A szögfelezők által bezárt szögek cosinusai:

$$\cos B_1DC_1 = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} + \mathbf{c}|}, \quad \cos C_1DA_1 = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a} + \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} + \mathbf{c}|},$$

és

$$\cos A_1DB_1 = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a} + \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} + \mathbf{c}|}.$$

A nevezők pozitívak. A számlálókban a beszorzást elvégezve rendre a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$

$$\mathbf{b}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$

$$\mathbf{c}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

Mivel  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ , a kapott kifejezések egyenlők, így a feladat állítása az I. megoldás végén mondottak alapján igaz.

*Hornung Tamás* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)