

I. megoldás. 1. Azt mutatjuk meg, hogy P_9 -et a keresett A_{10} pontra tükrözve, visszkapjuk P -t. (Az biztos, hogy a P_9 -et P -be vivő egybevágósági transzformáció tükrözés, hiszen minden egyes tükrözés – mint 180° -os elfordítás – a sík minden irányát a vele ellentétes irányba viszi át, ugyanígy páratlan számú tükrözés is, páros számú tükrözés pedig az eredeti irányba.)

Felhasználjuk azt a tételt (az I. osztályos tankönyvből), hogy a sík egy K alakzatát tükrözve egy C_1 centrumra, majd a kapott K_1 képet a C_2 centrumra, a K_{12} új tükörkép úgy is megkapható K -ból, hogy ezt eltoljuk a $2 \cdot \overrightarrow{C_1 C_2}$ vektorral.

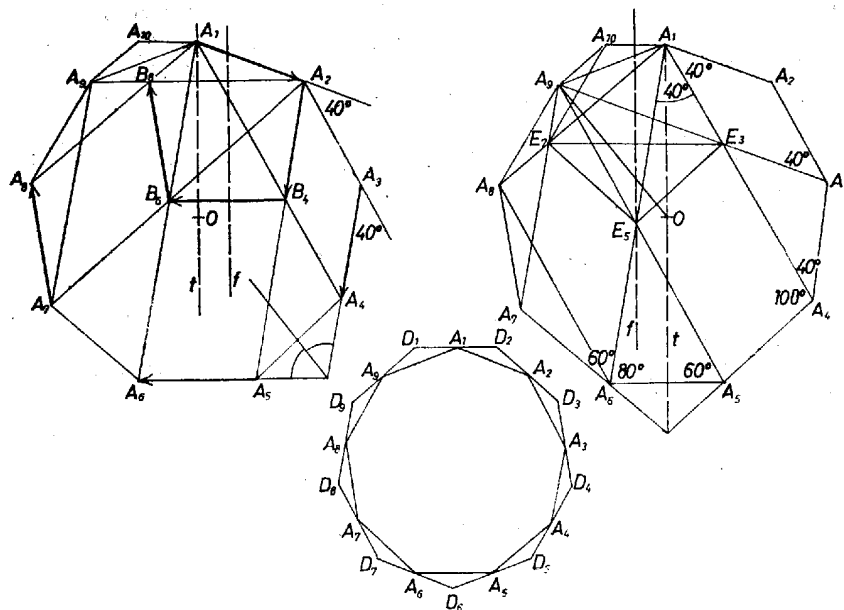
2. Ezt esetünkre alkalmazva azt kívánjuk, hogy

$$2(\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4} + \overrightarrow{A_5 A_6} + \overrightarrow{A_7 A_8} + \overrightarrow{A_9 A_{10}}) = \vec{0}$$

legyen (vagyis a zérus vektor). Ebből

$$(1) \quad -\overrightarrow{A_9 A_{10}} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4} + \overrightarrow{A_5 A_6} + \overrightarrow{A_7 A_8}.$$

Itt az első két tag összege az az $\overrightarrow{A_1 B_4}$, amelyre $\overrightarrow{A_2 B_4} =$



Továbbmenve (1) első három tagjának összege az az $\overrightarrow{A_1 B_6}$, melyre $\overrightarrow{B_4 B_6} = \overrightarrow{A_5 A_6}$. Itt B_6 egyrészt az $A_1 A_6$ átlón van, hiszen $A_6 B_6 \parallel A_5 B_4$, az utóbbi egyenes azonos $A_5 A_2$ vel és evvel az A_6 on át húzott párhuzamos átmegy A_1 -en. Másrészt az $A_2 A_7$ átlón is rajta van B_6 , ugyanis $A_2 B_6$ merőleges az $A_2 B_6 B_4$ egyenlő szárú háromszög B_4 ből induló szögfelezőjére, ami párhuzamos a szárak eltolásából adódó $A_3 A_4$, illetve $A_5 A_6$ egyenesek közti szög felezőjével, ez azonos P -nek A_9 -ből induló szimmetriatengelyével, ami pedig merőleges $A_2 A_7$ -re, tehát $A_2 B_6$ valóban azonos az $A_2 A_7$ egyenessel.

Legyen (1) teljes jobb oldala az $\overrightarrow{A_1 B_8}$, vagyis $\overrightarrow{B_6 B_8} = \overrightarrow{A_7 A_8}$, továbbá jelöljük a $B_4 B_6$ és $A_5 A_6$ szakasz felező merőlegességét f -fel, illetve t -vel. Ezek $\overrightarrow{B_4 B_6} = \overrightarrow{A_5 A_6}$ alapján párhuzamosak, és t a P -nek az A_1 -en átmenő szimmetriatengelye. Így B_8 az A_2 tükörképe f -re, hiszen

$$B_6 B_8 \# A_7 A_8 = A_4 A_3 \# B_4 A_2,$$

és az $A_7 A_8$, $A_4 A_3$ egyenesek egymás tükörképei t -re; és mivel $A_2 A_9$ is merőleges f -re, azért B_8 az $A_2 A_9$ en van. Továbbá rajta van az $A_8 A_1$ en is, hiszen A_8 -on át $A_7 B_6$ -tal, azaz $A_7 A_2$ -vel $A_8 A_1$ az egyetlen párhuzamos.

Most már (1)-ben $\overrightarrow{A_1 B_8} = -\overrightarrow{A_9 A_{10}}$, vagyis $\overrightarrow{B_8 A_1} = \overrightarrow{A_9 A_{10}}$, a $B_8 A_9 A_{10} A_1$ négyszög paralelogramma,

$$A_{10} A_9 \parallel A_1 A_8 \quad \text{és} \quad A_{10} A_1 \parallel A_9 A_2,$$

más szóval A_{10} az A_1 -en át $A_1 O$ -ra és A_9 -en át $A_9 O$ -ra állított merőlegesek metszéspontja, ahol O a P kilencszög centruma.

II. megoldás. Ha már tudjuk (vagy legalább sejtjük), mit kell bizonyítanunk, gyorsabban jutunk célhoz a következő úton. Húzzuk meg az érintőt P körülírt köréhez P mindegyik csúcsában, és jelöljük a szomszédos csúcsokbeli érintők

metszéspontját D_1 -gyel, D_2 -vel, ..., D_9 -cel, ahol D_1 az A_9 és A_1 -beli érintők közös pontja stb. (2. ábra). Ekkor a $D_1D_2 \dots D_8D_9$ kilencszög is szabályos, és az I. megoldás (1) egyenletéhez

$$\begin{aligned} & 2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_7A_8}) = \\ & 2(\overrightarrow{A_1D_2} + \overrightarrow{D_2A_2} + \overrightarrow{A_3D_4} + \overrightarrow{D_4A_4} + \overrightarrow{A_5D_6} + \overrightarrow{D_6A_6} + \overrightarrow{A_7D_8} + \overrightarrow{D_8A_8}) = \\ & (\overrightarrow{D_1D_2} + \overrightarrow{D_2D_3} + \overrightarrow{D_3D_4} + \overrightarrow{D_4D_5} + \overrightarrow{D_5D_6} + \overrightarrow{D_6D_7} + \overrightarrow{D_7D_8} + \overrightarrow{D_8D_9}) = \\ & \overrightarrow{D_1D_9} = -2\overrightarrow{A_9D_1}. \end{aligned}$$

Eszerint a keresett A_{10} tükrözési centruma azonos D_1 -gyel.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldáshoz hasonlóan jutunk célhoz a következő előkészítés után. Jelöljük a $C_1, C_2, \dots, C_k$ centrumokon való egymás utáni tükrözések eredményét $C_1C_2 \dots C_k$ -val. Láttuk, hogy a C_1C_2 transzformáció a $2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2}$ -ral való eltolás, a $C_1C_2C_3C_4$ pedig eltolás a $2(\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_3C_4})$ -ral. Speciálisan, ha a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög paralelogramma, akkor az eltolás $\vec{0}$, az eredmény azonos a kiindulással, és ha az azonosságot 1-gyel jelöljük, akkor $C_1C_2C_3C_4 = 1$. Hasonlóan $C_1C_1 = 1$.

Feladatunkban azt az A_{10} -et keressük, amelyre

$$A_1A_2 \dots A_9A_{10} = 1.$$

A követelményt úgy alakítjuk, hogy A_3 után beiktatjuk tényezőül az $E_3E_3 = 1$ szorzatot – ami nyilvánvalóan nem változtat –, majd A_5 és A_7 után E_5E_5 -öt, illetve E_7E_7 -et azzal az E_3, E_5 ponttal, amellyel az $A_1A_2A_3E_3$, az $E_3A_4A_5E_5$ és az $E_5A_6A_7E_7$ négyszög paralelogramma (3. ábra). A tényezők csoportosítása után elhagyjuk azokat az 1-es „tényezőket”, amelyek e paralelogrammák egymás utáni csúcsain való végigtükrözések eredményeiként adódnak:

$$\begin{aligned} & (A_1A_2A_3E_3)(E_3A_4A_5E_5)(E_5A_6A_7E_7)(E_7A_8A_9A_{10}) = \\ & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (E_7A_8A_9A_{10}) = E_7A_8A_9A_{10} = 1. \end{aligned}$$

Eszerint A_{10} az a pont, amely az $E_7A_8A_9$ háromszöget paralelogrammává egészíti ki.

Az I. megoldáshoz hasonlóan adódik, hogy E_3, E_5 és E_7 rendre 2–2 átló metszéspontja, és pedig

$$\begin{aligned} E_3 & \text{ az } A_3A_9 \text{ és } A_1A_4, \\ E_5 & \text{ az } A_5A_9 \text{ és } A_1A_6, \\ E_7 & \text{ az } A_7A_9 \text{ és } A_1A_8 \end{aligned}$$

metszése, és ekkor A_{10} az A_9 -en át A_1A_8 -cal és A_1 -en át E_3E_7 -tel húzott párhuzamosok metszése.

2. Az átlóknak az előbbi E -pontokkal való kettéosztásai lehetőséget adnak összefüggések felírására, P oldalának és átlóinak hosszai között.