

Jelölje $f(x)$ az $\frac{x}{2-x}$ függvényt.

Ekkor

$$g_1(x) = xf(x)$$

és

$$g_{k+1}(x) = xf(g_k(x)), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mivel $f(1) = 1$, teljes indukcióval adódik, hogy $g_1(1) = g_2(1) = \dots = g_k(1) = \dots = 1$.

Az $f(x)$ differenciálható az $x = 1$ helyen és így az előbbi eredmény felhasználásával az indukció módszerével azonnal azt is láthatjuk, hogy a $g_k(x)$ függvények is mind differenciálhatók az $x = 1$ helyen.

Deriválással

$$g'_{k+1}(x) = f(g_k(x)) + xf'(g_k(x)) \quad g'_k(x),$$
$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}, \quad \text{és így} \quad g'_{k+1}(1) = 1 + 2g'_k(1).$$

Vezessük be a $h_k = g'_k(1) + 1$ jelölést, ekkor

$$h_{k+1} = g'_{k+1}(1) + 1 = 2 + 2g'_k(1) = 2(g_k(1) + 1) = 2h_k.$$

Ebből ismét teljes indukcióval adódik, hogy

$$h_{k+1} = 2^k h_1.$$

De $h_1 = g'_1(1) + 1 = 4$ és így

$$g'_k(1) = h_k - 1 = 2^{k+1} - 1, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ezzel a keresett sorozat elemeit meghatároztuk.