

$$(1) \quad T = \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{9}$$

Az  $(A^n - B^n) = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1})$  összefüggés alapján  $T$  a következő alakra hozható:

$$T = \frac{10(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10^n - 1}{9} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} + \dots + \frac{10 - 1}{9}.$$

Itt a számlálók mindegyike osztható  $(10 - 1)$ -gyel, tehát  $T$  valóban egész szám. Ha  $j$  páros szám, akkor  $10^j - 1$  osztható  $(10 + 1)$ -gyel is, emiatt  $\frac{10^j - 1}{9}$  is osztható 11-gyel; ha pedig  $j$  páratlan, akkor a  $\frac{10^j - 1}{9}$  számot 11-gyel osztva egyet kapunk maradékul, hiszen

$$\frac{10^j - 1}{9} = 10 \frac{10^{j-1} - 1}{9} + 1,$$

ahol az első szám osztható 11-gyel. Eszerint ha a fenti összeg minden tagját 11-gyel osztjuk, annyiszor kapunk 1 maradékot, ahány páratlan szám van  $n$ -ig, a többi maradék pedig 0. Az  $n$ -nél nem nagyobb páratlan számok száma egyenlő  $\frac{n+1}{2}$  egész részével,  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$ -vel, tehát a  $T : 11$  osztás maradéka egyenlő az  $\left[ \frac{n+1}{2} \right] : 11$  osztás maradékával. Ha az  $(n+1)$  szám 22-vel osztva  $r$ -et ad maradékul:

$$n + 1 = 22m + r,$$

akkor  $\frac{n+1}{2} = 11m + \frac{r}{2}$ , tehát a  $T : 11$  osztás maradéka egyenlő  $\frac{r}{2}$  egész részével.

*Megjegyzés.* Jelöljük az (1) alatti számot  $T_n$ -nel. Azt, hogy ez a szám egész, a  $T_n = 10 T_{n-1} + n$  összefüggés alapján is beláthatjuk.