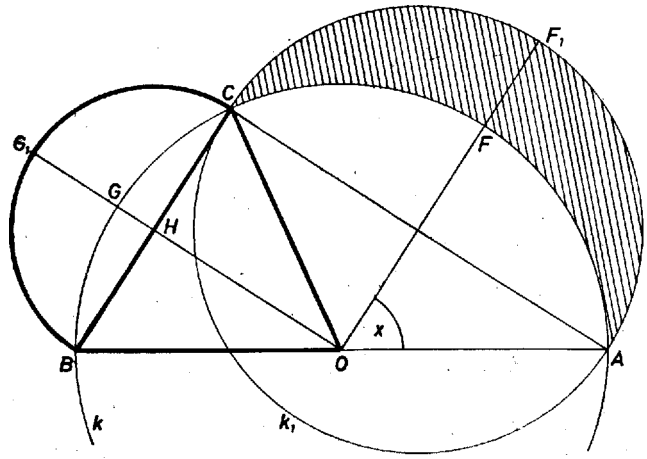
1. Jelöljük az AOC szöget $2x$-szel – így nyilván elég tekinteni a $0 < x < \pi/2$ értékeket –, továbbá az AC átmérőjű kört k_1-gyel és az AC egyenes O-t nem tartalmazó partján levő AC ívek – ti. a k, illetve k_1 részét képező ív – felezőpontját F-fel, illetve F_1-gyel.



A k_1 le nem fedett részének $f(x)$ területe egyenlő az ACF_1 félkör és az ACF körszelet területének különbségével, a szelet területét pedig az $AOCF$ körcikk és az AOC egyenlő szárú háromszög területének különbsége adja. Hosszúságegységül OA-t választva, $AC = 2\sin x$, a háromszög magassága $\cos x$, ezért

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\sin^2 x - (x - \sin x\ \cos x) = \frac{\pi}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - x.$$

Ennek szélső értéke ott lehet, ahol a derivált eltűnik:

$$f'(x) = \pi\ \sin x\ \cos x + \cos 2x - 1 = \pi\ \sin x\ \cos x - 2\sin^2 x = \sin 2x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} x\right) = 0.$$

A két ilyen hely közül feladatunk számára egyedül az a hely lényeges, ahol a zárójelbeli kifejezés 0, azaz

$$\operatorname{tg} x_0 = \pi/2, \quad x_0 = 57^\circ\ 31' = 1{,}0047 \text{ (radián)},$$

ugyanis a $\sin 2x$ tényező az $x = 0$ és $x = \pi/2$ helyeken tűnik el, ekkor C az A-ban, illetve B-ben van, és így k_1 lefedetlen része 0.

Az x_0 helyen $f(x)$-nek maximuma van, mert az értelmezési tartományban $\operatorname{tg} x$ növekvő függvény, és így $x < x_0$ esetén $f'(x) > 0$, ha pedig $x > x_0$, akkor $f'(x) < 0$. A maximum értéke egyszerű számítással

$$f(x_0) = \frac{\pi}{2} - x_0 = 0{,}5661. \tag{1}$$

2. A C pont kapott helyzetében az OBC háromszög területének és a BC átmérőjű félkör területének hányadosa

$$\frac{\sin x_0 \cos x_0}{\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x_0} = \frac{\operatorname{tg} x_0}{\dfrac{\pi}{2}} = 1,$$

tehát a két terület valóban egyenlő.

Megjegyzések. 1. Az $f(x_0)$-nak (1)-beli kifejezése alapján szemléletesen is bebizonyíthatjuk a feladat állítását. Felhasználhatjuk ebben, hogy az AC és BC átmérőjű körökből a k által le nem fedett részek együttes területe mindig egyenlő az ABC háromszög területével, bárhol vesszük is C-t a k kerületén (az ábra G és G_1 pontja a k-beli BC ív, ill. a BC átmérőjű félkörív felezőpontja):

$$AFCF_1 + BGCG_1 = ABC, \tag{2}$$

hiszen mindkét oldalhoz hozzáadva az ACF és BCG körszeletek területét, a jobb oldalon az ABC félkör területét kapjuk, ami $(\pi/2)(AB/2)^2 = (\pi/8)\cdot AB^2$ a bal oldal két tagja pedig az AC és a BC átmérő fölötti félkör területe, ezek összege pedig Pitagorasz tétele alapján ugyancsak

$$\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right\} = \frac{\pi}{8}AB^2.$$

Felhasználjuk azt is, hogy az AOC és BOC háromszögek területe egyenlő. Mármost (1) alapján fennáll

$$AFCF_1 = ABGCF - AOCF = OBGC.$$

Hozzáadva mindkét oldalhoz a $BGCG_1$ holdacskát és figyelembe véve (2)-t, a bal oldal:

$$AFCF_1 + BGCG_1 = ABC = 2 \cdot BCO,$$

a jobb oldal pedig

$$OBGC + BGCG_1 = BCG_1 + BCO,$$

amiből $BCG_1 = BCO$. (A közös BC alapon álló félkör és BCO háromszög „magasságainak" aránya $HG_1 : HO = 2 : \pi$.)

2. A (2) tételt „Hippokratész holdacskái" néven szokás említeni. Hippokratész görög matematikus az i. e. V. században élt. Az a példa, hogy a körívekkel határolt idomok együttes területe egyenlő egy egyenes vonalú idom területével – hosszú időn át táplálta azt a reményt, hogy majd sikerül a körhöz is találni vele egyenlő területi, egyenes vonalú idomot. Ha találtak volna ilyen (körzővel és egyenes vonalzóval szerkeszthető) idomot, akkor már könnyű lenne szerkeszteni vele egyenlő területű négyzetet is – ezt tekintették volna a görögök a területmeghatározás befejezésének. Ma már tudjuk F. Lindemann (1852–1939) német matematikus bizonyításából, hogy ilyen szerkesztés lehetetlen. (A mi C pontunk sem szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval; emiatt fogalmazott a szerkesztő bizottság így: „határozzuk meg…".)

Ezt a tényt egy nem szerencsés kifejezés bevezetésével magyarul így mondták, illetve mondják: *a kör négyszögesítése* nehéz probléma, illetve most már *lehetetlen*. A „négyszögesítés" szó a *quadratúra* (=területmeghatározás) és *quadráció* (idommal egyenlő területű négyzet szerkesztése) megfelelője kívánt lenni, de sok hozzá nem értő számárra – sajnálatosan – inkább annak mintegy jelképe lett, hogy a – különben is sokak előtt nem népszerű – matematika milyen hiábavalóságokkal foglalkozik.

Tanulság lehet ebből, hogy idegen szakkifejezések számára csak olyan magyar megfelelőt fogadjunk el, amely a lényeget fejezi ki és nem enged félremagyarázást. Ebben pedig az is nehézség, hogy a hozzáértők beszédében, a gyakori használatban a kifejezések megrövidülnek, másrészt a kérdéssel újonnan ismerkedők (tanulók) részére gyakran mindjárt a rövid kifejezést közlik, kellő ismerkedési, megszokási idő nélkül.