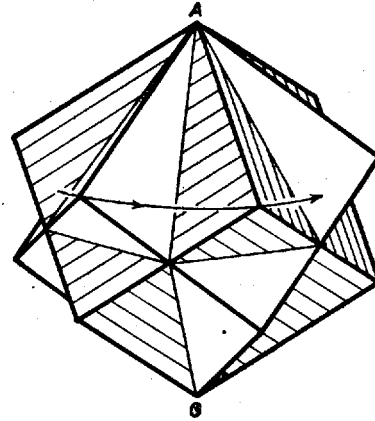
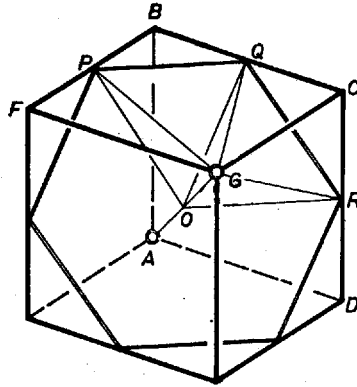


a) Megmutatjuk, hogy a két kockáról az a 6-6 él, amelyek nem futnak be a közös tengely végpontjaiba, páronként felezi egymást. Ennek alapján könnyen felbonthatjuk az együttesen kitöltött teret is és az alakzat felszínét is egyszerűen számítható térfogatú, illetve felszínű részekre.

Legyen egy kocka alaplappja  $ABCD$ , egyik oldallappja  $BCGF$ , a  $BF$  él felezőpontja  $P$ , a  $BC$ ,  $CD$  élé  $Q$ , illetve  $R$ .



Ezek mindegyike egyenlő távolságra van  $A$ -tól is,  $G$ -től is, mert a távolság egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói 1 és  $1/2$ . Ugyanez áll a további 3, sem  $A$ -ba, sem  $G$ -be nem befutó él felezőpontjára; az átfogók hossza  $r = \sqrt{5}/2$ . Így a 6 felezőpont rajta van az  $A$  és  $G$  körüli  $r$  sugarú gömbök felületén és metszészvonalán, ami egyszermind az  $AG = \sqrt{3}$  testátló felező merőleges síkjában is benne van, tehát kör. Ennek  $O$  középpontja felezi  $AG$ -t, sugara pl. az  $AQO$  derékszögű háromszögből  $\sqrt{2}/2$ . Ugyanekkora 2-2 egymás utáni felezőpont távolsága, pl. a  $BCGF$  lapban  $QR$ . Ezek szerint a 6 felezőpont egy körbeírt, egyenlő oldalú idomnak, szabályos hatszögnek csúcsait alkotja,  $\angle POQ = \angle QOR = 60^\circ$ .

Ha most a második kockát az eddigiből  $AG$  körüli  $60^\circ$ -os elfordítással származtatjuk, akkor  $P$  átjut  $Q$ -ba,  $Q$  pedig  $R$ -be, tehát  $BF$  új helyzete felezi  $BC$ -t,  $BC$  új helyzete  $CD$ -t stb., amint állítottuk.

Messzük le az eredeti kockából az  $APQ$ , a  $GQR$ , ... síkkal a  $B$ , a  $C$  csúcs körüli,  $1/2$ ,  $1/2$ ,  $1$  élű derékszögű tetraédert, és  $A$ -t,  $G$ -t kivéve a kocka további 4 csúcsának is az ilyen „környezetét”. A visszamaradó test szabályos hatoldalú kettős gúla (bipiramis), ez a kocka elfordítása után az új helyzetben is benne van, a két kocka belsejének közös része. A lementszett – de továbbra is odatapasztott – 6 tetraéder viszont az eredeti kockán kívülre jut, pl. az  $APQB$  tetraéder az  $AQRB'$ -be, és  $B'$ -t az  $ABCD$  lap – illetve ennek  $AQR$  részháromszöge – elválasztja a kockától.

b) Eszerint a keresett térfogat a kettős gúla és 12 kis tetraéder térfogatának összege, másképpen az eredeti kocka és 6 kis tetraéder térfogatának összege:

$$V = 1^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4} \text{ térfogategység.}$$

A felszín pedig a kis tetraéder 3 derékszögű lapterület összegének 12 szerese:

$$F = 12 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{15}{2} \text{ területegység.}$$

*Megjegyzés.* Érdekes, megegyezés, hogy alakzatunk térfogata is, felszíne is  $1/4$  résszel nagyobb, mint az eredeti kockáé.

Mátrai Gizella (Pécs, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)