

Az n könyvet $n!$ különböző módon rakhatjuk fel a polcra. A kedvező esetek összeszámolása érdekében képzeletben kötözzük össze felrakás előtt a kedvenc könyveket. Az így kapott egységet a többi $(n - k)$ könyvvel együtt összesen $(n - k + 1)!$ különböző sorrendben tehetjük a polcra. Összekötés előtt a kedvenc könyvek sorrendje $k!$ -féleképpen alakítható ki, tehát a kedvező esetek száma $k!(n - k + 1)!$. Így a keresett valószínűség:

$$P(k) = \frac{k!(n - k + 1)!}{n!}.$$

Ez egygel egyenlő – tehát maximális –, ha $k = 1$, vagy $k = n$. A minimum helyének meghatározása érdekében vizsgáljuk meg, melyek azok a k értékek, amelyekre $P(k) > P(k + 1)$. Mivel

$$\frac{P(k)}{P(k + 1)} = \frac{k!(n - k + 1)!}{(k + 1)!(n - k)!} = \frac{n - k + 1}{k + 1},$$

$P(k)$ akkor és csakis akkor nagyobb $P(k + 1)$ -nél, ha $(n - k + 1) > (k + 1)$, azaz ha $2k < n$. Ha $2k = n$ (ami csak páros n mellett fordulhat elő), akkor $P(k) = P(k + 1)$, ha pedig $2k > n$, akkor $P(k) < P(k + 1)$. Ha tehát n páros, akkor

$k = \frac{n}{2}$ -ig $P(k)$ monoton fogy, a $P\left(\frac{n}{2}\right) = P\left(\frac{n + 2}{2}\right)$ értékek minimálisak, ezt követően $P(k)$ monoton nő. Ha pedig

n páratlan, a minimuma $k = \frac{n + 1}{2}$ értékhez tartozik. Közben azt is beláttuk, hogy $P(1) > P(2)$ és $P(n - 1) < P(n)$, tehát a $k = 1, n$ értékeken kívül más maximális érték nincs.

Kivételt képeznek az $n = 1, n = 2$ esetek, hiszen ekkor csak egy, illetve két egyenlő $P(k)$ értékünk van, tehát szélső értékről nem beszélhetünk.

Bőősi Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem beszéltünk a $k = 0$ esetről, ha ezt is megengedjük, $P(k)$ értéke itt is maximális. Tulajdonképpen az is vitatható, hogy $k = 1$ mellett a kedvenc könyveink „egymás mellé” kerülnek-e. A feladat szövege inkább a $k > 1$ feltételt sugallja, ekkor természetesen $n > 1$, és csak $k = n$ mellett van maximum.