

Először is megállapítjuk, hogy az  $S_n(x)$  függvény minden  $x$ -re és minden  $n$ -re értelmezve van, hiszen a nevezőben

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2,$$

illetve ennek valamely hatványa áll, és ez soha nem nulla. Másik észrevételünk az, hogy az (1) mértani sor hányadosa nem 1, azaz

$$(2) \quad \frac{x}{x^2 - 2x + 3} \neq 1, \quad \text{hiszen} \quad 1 - \frac{x}{x^2 - 2x + 3} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 3} > 0.$$

Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy  $x^2 - 3x + 3 > 0$ , ez viszont

$$(3) \quad x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

miatt igaz.

Mivel az (1) mértani sor hányadosa nem 1, azért lehet rá alkalmazni a mértani sor összegképletét:

$$(4) \quad S_n(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 3}\right)^n}{1 - \frac{x}{x^2 - 2x + 3}} = \frac{1 - \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 3}\right)^n}{x^2 - 3x + 3}.$$

a) Ha  $x > 0$ , akkor  $\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 3}\right)^n > 0$  tetszőleges  $n$ -re, következésképpen

$$S_n(x) < \frac{1}{x^2 - 3x + 3} \leq \frac{4}{3},$$

a (3) szerint. Így  $x > 0$  és  $n$  tetszőleges értéke mellett  $S_n(x) < 4/3$ .

b) Ha  $x = 0$ , akkor  $S_n(0) = 1/3$  az  $n$  értékétől függetlenül, és ez is  $< 4/3$ .

c) Végül ha  $x < 0$ , akkor

$$(5) \quad 0 > \frac{x}{x^2 - 2x + 3} > -1,$$

hiszen  $x^2 - x + 3 > 0$ , és így  $x > -(x^2 - 2x + 3)$ . Emiatt tetszőleges  $n$ -re

$$\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 3}\right)^n \geq \frac{x}{x^2 - 2x + 3},$$

amiből (4) szerint

$$S_n(x) \leq \frac{1 - \frac{x}{x^2 - 2x + 3}}{x^2 - 3x + 3}$$

következik. (5) miatt itt a számláló kisebb, mint 2, és (3) miatt  $x < 0$  mellett a nevező nem kisebb  $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$ -nál, így

$$S_n(x) \leq \frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

amint azt bizonyítanunk kellett.