

I. megoldás. Az állítást indirekt úton bizonyítjuk be. Tételezzük fel, hogy csak véges sok számot karikáztunk be. A bekarikázott számok halmaza nem üres: az első számot mindenképpen be kell karikáznunk. Ekkor a bekarikázott számok között van legnagyobb, legyen ez N . Tekintsük a „valamilyen sorrendben” leírt természetes számok közül az első $(N + 1)$ darabot. Mivel minden számot egyszer írtunk le, azért ez az $(N + 1)$ szám mind különböző természetes szám.

Megmutatjuk, hogy ezen $(N + 1)$ szám egyike sem nagyobb N -nél.

a) A bekarikázottak nem lehetnek nagyobbak N választása miatt.

b) A be nem karikázott számok a feladat feltétele szerint kisebbek, mint ahányadik helyen állnak. Így az első $(N + 1)$ helyen álló be nem karikázott számok közül sem lehet N -nél nagyobb.

Így arra jutottunk, hogy $(N + 1)$ különböző természetes számunk van, amelyek közül egyik sem nagyobb N -nél. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis az eredeti állítás igaz.

Horváth Eszter (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. A „valamilyen sorrendben” leírt természetes számok közül az i -edik helyen álló legyen a_i . Tekintsük a sorozat első k elemét. Ezek összegét nem növeljük, ha helyette a $\sum_{i=1}^k i$ összeget vesszük, vagyis

$$(1) \quad \sum_{i=1}^k (a_i - i) \geq 0 \quad (k \geq 1).$$

A bizonyítást ismét indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy az a_i , számok közül csak véges sokat karikáztunk be, azaz csak véges sok számra teljesül, hogy $(a_i - i) \geq 0$. Legyen a bekarikázott számok közül az utolsónak a sorszáma m ($m \geq 1$, hiszen az első számot feltétlenül bekarikázzuk). Legyen

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m (a_i - i) = s.$$

Az $(m + 1)$ -edik elemtől kezdve az indirekt feltevés következtében egy elem sincs bekarikázva, így $(a_i - i) < 0$, ha $i \geq m + 1$. Mivel a_i és i természetes számok, $a_i - i \leq -1$ ($i \geq m + 1$), és ezért

$$(3) \quad \sum_{i=m+1}^{m+s+1} (a_i - i) \leq (-1)(s + 1) = -s - 1.$$

Összeadva (2)-t és (3)-t

$$\sum_{i=1}^{m+s+1} (a_i - i) \leq -1.$$

Ez azonban (1) miatt lehetetlen. Ellentmondásra jutottunk: indirekt feltevésünk hibás volt, vagyis végtelen sok számot kellett bekarikáznunk.

Somogyi Antal (Budapest, Móricz Zs. Gimn. IV. o. t.)