$$\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i+\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\ldots+\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}. \tag{1}$$

Szorozzuk meg az (1) alatti összegek tagjait az előttük álló binomiális együtthatóval, és tekintsük mindegyik csoportból az i-edik szorzatot:

$$\binom{k}{1} i,\quad \binom{k}{2} i^2,\ldots,\binom{k}{k-1} i^{k-1}.$$

Ezek a kifejezések a binomiális tételre emlékeztetnek, ennek alapján az összegük könnyen meghatározható:

$$\binom{k}{1} i+\binom{k}{2} i^2+\ldots+\binom{k}{k-1} i^{k-1}=$$
$$=\left[\binom{k}{0}\cdot 1+\binom{k}{1} i+\binom{k}{2} i^2+\ldots+\binom{k}{k-1} i^{k-1}+\binom{k}{k} i^k\right]-$$
$$-1-i^k=(i+1)^k-i^k-1.$$

Ezeket a számokat kell az $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ értékekre venni és összeadni:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^k-i^k-1\right]=\sum_{=2}^{n+1} j^k-\sum_{i=1}^{n} i^k-n=(n+1)^k-1-n.$$

Tehát az (1) alatti kifejezés értéke $(n+1)^k-(n+1)$.

Megjegyzés. A megoldás utolsó átalakítása szavakkal így mondható el. Tekintsük 1-től n-ig mindegyik természetes számra a nála eggyel nagyobb szám k-adik hatványának és az illető szám k-adik hatványának a különbségét, és adjuk össze ezeket a különbségeket. Ezt az összeget úgy is megkaphatjuk, hogy először összeadjuk a különbségek első tagjait, majd levonjuk belőle a második tagok összegét. Az első tagok összege nem más, mint 2-től $(n+1)$-ig a természetes számok k-adik hatványainak az összege, a második tagok összege pedig 1-től n-ig a k-adik hatványok összege. A különbségükből tehát minden kiesik, csak a szélső tagok maradnak: $(n+1)^k-1^k$.

Azt is mondhatjuk, hogy ha a különbségeket egymás után írjuk:

$$(2^k-1^k)+(3^k-2^k)+\ldots+\big((n+1)^k-n^k\big),$$

majd megcseréljük a tagok sorrendjét:

$$(-1^k+2^k)+(-2^k+3^k)+\ldots+\big(-n^k+(n+1)^k\big),$$

akkor a szomszédos párokban egymás mellé kerülő tagok algebrai összege 0, a teljes összeg összecsuklik, mint egy harmonika, és marad a szélső tagok különbsége.