

I. megoldás. Könnyű látni, hogy ha (x_0, y_0) egy megoldása (1)-nek, akkor $(-x_0, -y_0)$ is megoldás, ezért elég megkeresni azokat a megoldásokat, amelyekben $y > 0$ (hiszen $y = 0$ úgysem megoldás). Tekintsük y -t egyelőre paraméternek, így a

$$2x^2 - 17yx + (8y^2 + 423) = 0$$

egyenletből

$$(2) \quad x = \frac{1}{4}(17y \pm \sqrt{D}),$$

ahol D a diszkrimináns jelöli:

$$D = 289y^2 - 8(8y^2 + 423) = 225y^2 - 3384,$$

ennek egy z egész szám négyzetének kell lennie, másrészt (2) zárójelében 4-gyel osztható számnak kell adódnia. Így

$$225y^2 - z^2 = (15y - z)(15y + z) = 3384 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 47,$$

tehát $15y - z = d_1$ és $15y + z = d_2$ egymásnak a 3384-re nézve kapcsolt osztói:

$$15y - z = d_1,$$

$$15y + z = d_2,$$

és innen, figyelembe véve (2)-t is:

$$y = \frac{d_1 + d_2}{30}, \quad z = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(17y + z) = \frac{d_1 + 16d_2}{60}, \quad x_2 = \frac{1}{4}(17y - z) = \frac{16d_1 + d_2}{60}.$$

z miatt d_1 -nek és d_2 -nek egyező párosságúnak kell lennie, vagyis mindkettőnek párosnak. y miatt pedig mindkettőnek 3-mal oszthatónak kell lennie, hiszen ha egyikük nem osztható vele, akkor a másik 3^2 -nel osztható, így pedig $d_1 + d_2$ nem osztható 3-mal. Eszerint d_1 és d_2 oszthatók 6-tal és további tényezőik csak a $3384 : 6^2 = 94 = 2 \cdot 47$ szám tényezőiből választhatók. Erre két lehetőség van (hiszen d_1, d_2 egyező előjelűek, és $y > 0$ miatt pozitívok):

$$\text{vagy } \begin{cases} d_1 = 6 \cdot 1, \\ d_2 = 6 \cdot 94, \end{cases} \quad \text{vagy } \begin{cases} d_1 = 6 \cdot 2, \\ d_2 = 6 \cdot 47. \end{cases}$$

(fölcserélésük csak z előjelét változtatná meg, ami lényegtelen).

A másodikból y nem egész; az elsőből

$$y = 19, \quad z = 279, \quad x_1 = 11, \quad x_2 \text{ nem egész},$$

ennélfogva (1)-nek csupán két megoldása van egész számokban:

$$x = 11, \quad y = 19 \quad \text{és} \quad x = -11, \quad y = -19.$$

II. megoldás. Megpróbáljuk szorzattá alakítani az ismeretleneket tartalmazó tagokból álló kifejezést. Határozatlan együtthatókkal kísérletezve a kívánt

$$2x^2 - 17xy + 8y^2 = (Ax + By)(Cx + Dy)$$

azonosságból az együtthatók összehasonlítása alapján az

$$AC = 2, \quad BD = 8, \quad BC + AD = -17$$

egyenleteket kapjuk. Ezek szerint a BC, AD számok szorzata 16, összegük -17 , vagyis e szorzatok kielégítik a

$$z^2 + 17z + 16 = 0$$

egyenletet. Így BC, AD közül az egyik -1 , a másik -16 . Az $AC = 2$ szerint pedig – ha az együtthatókat az egész számok között keressük – A és C közül az egyik 1, a másik 2. Ha $A = 2$ és $C = 1$, akkor AD már csak -16 lehet, tehát $D = -8$ és $B = -1$.

A szorzattá alakítás után kapjuk, hogy (1) ekvivalens a

$$(2x - y)(8y - x) = 9 \cdot 47$$

egyenlettel. A bal oldal két tényezőjének a különbsége $(9y - 3x)$, ami osztható 3-mal, így a jobb oldalnak csak két felbontása jön szóba: $3 \cdot 141$ és $(-3) \cdot (-141)$. Ha általában

$$2x - y = U \quad \text{és} \quad 8y - x = V,$$

akkor

$$x = \frac{8U + V}{15}, \quad y = \frac{U + 2V}{15}.$$

Mivel $141 + 2 \cdot 3$ nem osztható 5-tel, $U = \pm 141$ nem vezet egész megoldásra. Ha viszont $U = \pm 3$, akkor $x = 11, y = 19$ vagy $x = -11, y = -19$, tehát ez a két számpár az összes megoldás.