

**I. megoldás.** A megoldás során a következő azonosságokat alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca); \\ a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc = \\ &= (a + b + c)^3 + 3abc - 3(a + b + c)(ab + bc + ca); \\ a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \\ &= [(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)]^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2(a + b + c)abc]. \end{aligned}$$

A bizonyítandó azonosság bal és jobb oldalát ekvivalens átalakításokkal közös alakra hozzuk: ebből már tényleg következik a két oldal egyenlősége:

A bal oldal  $a + b + c = 1$  felhasználásával így alakul:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= [(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)]^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2(a + b + c)abc] = \\ &= [1 - 2(ab + bc + ca)]^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc] = \\ &= 1 - 4(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca)^2 - 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc = \\ &= 1 - 4(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc. \end{aligned}$$

Míg a jobb oldal:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[1 - 2(ab + bc + ca)]^2 - [1 - 2(ab + bc + ca)] + \\ &\quad + \frac{4}{3}[1 - 3(ab + bc + ca) + 3abc] + \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{2} - 2(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)^2 - 1 + \\ &\quad + 2(ab + bc + ca) + \frac{4}{3} - 4(ab + bc + ca) + 4abc + \frac{1}{6} = \\ &= 1 - 4(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc. \end{aligned}$$

Így az eredeti egyenlőség valóban fennáll.

**II. megoldás.** Mivel  $a + b + c = 1$ , azért amennyiben a bizonyítandó állítás helyett azt mutatjuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} (2) \quad &a^4 + b^4 + c^4 = \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + \frac{4}{3}(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) + \\ &\quad + \frac{1}{6}(a + b + c)^4 \end{aligned}$$

összefüggés minden  $a, b, c$  számra fennáll, akkor készen vagyunk. Ennek igazolása végett a jobb oldalon mindegyik tagban kifejtjük a többtagúak hatványait:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= \frac{1}{2}[(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)], \\ &\quad - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 = \\ &= -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2[a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + \\ &\quad + c(a^3 + b^3) + 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)]; \\ \frac{4}{3}(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) &= \frac{4}{3}[a^4 + b^4 + c^4 + a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3)]; \\ \frac{1}{6}(a + b + c)^4 &= \frac{1}{6}(a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \\ &\quad + 4[a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) + 12(a^2bc + ab^2c + abc^2)]. \end{aligned}$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy összegük

$$\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right)(a^4 + b^4 + c^4) = a^4 + b^4 + c^4,$$

vagynak (2) valóban áll.