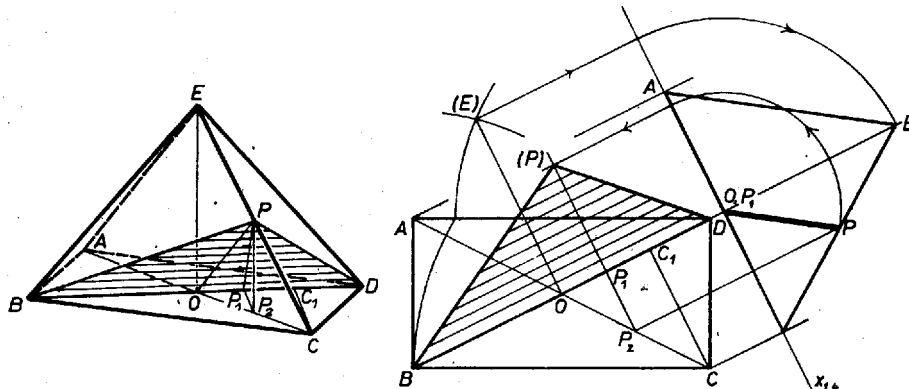


Az alaplap A, B, C, D csúcsai rajta vannak a szemben fekvő E (négyélű) csúcs, körüli $a\sqrt{3}$ sugarú gömbön. Ez a gömb az alapsíkot körben metszi, tehát az alapnéyszög körbe írt paralelogramma: téglalap, és a köréje írt kör középpontja az átlók O metszéspontja és EO a gúla magassága. Így a gúla szimmetrikus az AB és AD alapélek felező merőleges síkjára, és az EO mint tengely körüli 180° -os elfordítás is önmagába viszi át a testet.



Ezek szerint az alapidom két átlója egyenrangú, elég a kívánt metsző S síkot a BD átlón át fölvennünk. Az S meghatározásához még szükséges oldalélt lényegében kétféleképpen választhatjuk: S vagy az EA és EC valamelyikével párhuzamos, vagy pedig az EB -vel párhuzamos és ekkor át is megy rajta, valamint ED -n is, a metszet az EBD egyenlő szárú háromszög. (Tulajdonképpen csak az első lehetőség vizsgálatát tekintjük igazi feladatunknak. A második értelmezés kissé erőltetett, de a kitűzés ezt is megengedi – az idézett forrásbeli megfogalmazásban ez nem jöhetett szóba – ezért mindjárt elintézzük: a BD átló hossza $a\sqrt{5}$ az EBO derékszögű háromszögből a magasság $EO = a\sqrt{7}/2$ és az EBD háromszög területe $a^2\sqrt{35}/4$.)

A mondott forgási szimmetria a BD átló megkülönböztető kiválasztása után is megmarad, választhatjuk tehát úgy, hogy S az EA -val legyen párhuzamos. EC -vel való metszéspontját P -vel jelölve, S és az EAC sík metszészvonala nyilván PO , és ez az EAC háromszög középvonala, tehát $PO = EA/2$.

Legyen P és C merőleges vetülete BD -n P_1 illetve C_1 ekkor $OP_1 = P_1C_1$, hiszen e szakaszok a BD -re E -n, P -n és C -n át állított merőleges síkok szomszédos párjai közti távolságok, és $EP = PC$ miatt e távolságok egyenlők (az ábra jobb oldali részén P_2 a P vetülete az alapsíkon).

Mármost egymás utáni derékszögű háromszögekből:

$$BC_1 = \frac{BC^2}{BD} = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad OC_1 = \frac{3a}{2\sqrt{5}}, \quad OP_1 = \frac{3a}{4\sqrt{5}},$$

$$PP_1^2 = \sqrt{OP^2 - OP_1^2} = \frac{\sqrt{51}a}{4\sqrt{5}},$$

és így a PBD háromszög területe $a^2\sqrt{51}/8$.