

$$(1) \quad \frac{n^2 + 2n - 2}{6} < \sum_{k=2}^n \sqrt[k]{k!} < \frac{n^2 + 3n - 4}{4}.$$

Ha (1)-et teljes indukcióval akarjuk bizonyítani, azt kell ellenőriznünk, teljesül-e az n legkisebb szóba jövő értékére, és azt, hogy az egyes oldalak megváltozása nem változtat-e az egyenlőtlenség irányán, ha $(n-1)$ -ről áttérünk n -re.

Ha $n = 2$, akkor (1) az

$$1 < \sqrt{2} < 1,5$$

egyenlőtlenséget jelenti; ami valóban igaz. Ha $(n-1)$ -ről áttérünk n -re, a bal oldal megváltozása

$$B_n - B_{n-1} = \frac{n^2 + 2n - 2}{6} - \frac{(n-1)^2 + 2(n-1) - 2}{6} = \frac{2n+1}{6},$$

az egyenlőtlenséglánc középső tagjának a megváltozása

$$K_n - K_{n-1} = \sqrt[n]{n!},$$

végül a jobb oldal megváltozása

$$J_n - J_{n-1} = \frac{n^2 + 3n - 4}{4} - \frac{(n-1)^2 + 3(n-1) - 4}{4} = \frac{n+1}{2}.$$

Elég tehát a

$$\frac{2n+1}{6} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},$$

vagy a kicsit többet mondó

$$(2) \quad \frac{1}{3} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget bizonyítani az $n \geq 3$ egészekre.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $1, 2, \dots, n$ számokra. Ezeknek a számoknak a mértani közepe

$$M = \sqrt[n]{n!},$$

számtani közepe pedig

$$S = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Az $M < S$ egyenlőtlenségből épp (2) jobb oldalát kapjuk.

Az $n! = n \cdot (n-1)!$ összefüggés alapján alakítsuk a (2) közepén álló kifejezés n -ik hatványát szorzattá:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n+1)^n} &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \dots = \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1. \end{aligned}$$

Ez egy n -tényezős szorzat, elég belátnunk, hogy mindegyik tagja nagyobb $1/3$ -nál:

$$(3) \quad \left(\frac{j}{j+1}\right)^j > \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ismét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget akarjuk felhasználni: veszünk j számot, melyek mindegyike $\left(1 + \frac{1}{j}\right)$ -vel egyenlő, és veszünk k egymással egyenlő pozitív számot, amelyek szorzata $\frac{1}{3}$ -dal egyenlő. Ezek m mértani közepének $(j+k)$ -adik hatványa

$$m^{j+k} = \frac{1}{3} \left(\frac{j+1}{j}\right)^j,$$

számtani közepe pedig

$$s = \frac{j \left(1 + \frac{1}{j}\right) + k \cdot a}{j+k},$$

ahol $a^k = \frac{1}{3}$. Eszerint készen vagyunk, ha sikerül k -t úgy megválasztani, hogy $s = 1$ legyen, hiszen ekkor $m < 1$, ami ekvivalens a bizonyítandó (3)-mal.

Az $s \leq 1$ egyenlőtlenség feltétele

$$j + 1 + k \cdot a \leq j + k, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{3} = a^k \leq \left(\frac{k-1}{k} \right)^k,$$

ami teljesül például $k = 6$ mellett:

$$\left(\frac{6}{5} \right)^3 = \frac{216}{125} = 1,728 < \sqrt{3},$$

tehát $\left(\frac{5}{6} \right)^6 > \frac{1}{3}$.

Megjegyzések. 1. Hasonlóan látható be, hogy (1) igaz marad, ha a bal oldalára $(n^2 + 3n - 2)/6$ -t írunk.

2. A (2) közepén álló számok sorozata monoton fogy, de a tagjai nagyobbak a megoldásban szereplő $\left(1 - \frac{1}{k} \right)^k$ alakú számok mindegyikénél, ez utóbbiak sorozata viszont monoton nő. Tehát az

$$A_k = \left(1 - \frac{1}{k} \right)^k, \quad B_k = \frac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}$$

számokra $A_k < A_{k+1} < B_{k+1} < B_k$ teljesül. Ebből következik, hogy ha $n > k$, akkor a (2)-nél élesebb

$$A_j < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} < B_k$$

egyenlőtlenség is igaz, ahol j tetszőleges egész szám. Azt is lehet bizonyítani, hogy egyetlen olyan x szám van, amelyre $A_j < x < B_k$ teljesül minden j és k mellett, és ez az x a felsőbb matematika nevezetes, e -vel jelölt konstansának a reciproka: $x = 1/e = 0,36787 \dots$