

I. megoldás. a) A K_1 kifejezés ismeretlen tagja maga is mindenesetre négyzetszám: $4^x = (2^x)^2$, tehát feladatunk a $4^{10} + 4^{16}$ számot két négyzetszám különbségeként előállítani. Olyan megoldást keresünk, melyben $x \geq 10$. Ebben a követelmény szerint

$$\begin{aligned} K_1 &= 4^{10}(1 + 4^6 + 4^{x-10}) = N^2, \\ 1 + 4^6 + 4^{x-10} &= 4097 + (2^{x-10})^2 = \left(\frac{N}{4^5}\right)^2, \\ 4097 &= n^2 - z^2 = (n - z)(n + z), \end{aligned}$$

ahol n és z természetes számok, és z -ként csak a 2-nek egy nemnegatív egész kitevőjű hatványa fogadható el. Törzstényezők szorzatára felbontva $4097 = 1 \cdot 4097 = 17 \cdot 241$, így a szóba jövő n, z értékpárok

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} n - z &= 1 \\ n + z &= 4097 \end{aligned} \right\} \text{-ből } z &= 2048 = 2^{11}, \quad n = 2049, \\ \left. \begin{aligned} n - z &= 17 \\ n + z &= 241 \end{aligned} \right\} \text{-ből } z &= 112, \text{ ez nem felel meg.} \end{aligned}$$

Eszerint $x - 10 = 11$, $x = 21$ megfelelő kitevő, és pedig

$$4^{10} + 4^{16} + 4^{21} = 4^5 \cdot 2049^2.$$

Mivel a feladat nem kívánja minden megfelelő x megkeresését, K_1 kérdését megoldottnak tekinthetjük.

A kapott eredményből a feladat második kérdésére is kiolvashatunk egy megoldást, $y = 10$ mellett K_2 teljes négyzet.

b) Ugyanezzel az eljárással az $y \geq 16$ megszorítás alapján a

$$\begin{aligned} K_2 &= 4^{16}(1 + 4^5 + 4^{y-16}) = (4^8)^2 \{1025 + (2^{y-16})^2\} = M^2, \\ 1025 + u^2 &= m^2 \end{aligned}$$

követelményből, ahol $u = 2^{y-16}$ és $m = M/4^8$, két megfelelő u, y, m, M számnégyes adódik:

	$m - u$	$m + u$	u	m	y	M
I.	1	1025	$512 = 2^9$	513	25	$4^8 \cdot 513$
II.	25	41	$8 = 2^3$	33	19	$4^3 \cdot 33$

Ezekkel három megfelelő y értéket találtunk: $y = 10, 19$ és 25 .

II. megoldás. a) Megpróbáljuk K_1 tagjait egyenként azonosítani a $(c + d)^2 = c^2 + d^2 + 2cd$ kifejtés tagjaival, felhasználva, hogy az itt föllépő 2-es tényező osztója a K_1 -ban előírt alapoknak. A $2cd$ tagnak egymás után $4^{10}, 4^{16}, 4^x$ szerepét szánjuk.

α) $4^{16} = c^2$ és $4^x = d^2$, azaz $c = 2^{16}$ $d = 2^x$ mellett $2cd = 2^{1+16+x} = 4^{10} = 2^{20}$, ez $x = 3$ mellett teljesül, új megoldást találtunk:

$$4^{10} + 4^{16} + 4^3 = (c + d)^2 = (2^{10} + 2^3)^2.$$

β) A $c = 2^{10}$, $d = 2^x$ próbálkozásból az I. megoldásban talált $x = 21$ adódik.

γ) A $c = 2^{10}$, $d = 2^{16}$ próba nem ad megoldást, mert így $2cd$ a 2-nek páratlan kitevős hatványa, a 4-nek nem egész kitevőjű hatványa.

b) Ugyanez az eljárás K_2 esetében mindhárom szereposztásban eredményt ad, az I. megoldásban megtaláltakat. Azon múlik az a) esettől való eltérés, hogy ott mindkét ismert kitevő páros, szemben a b) esettel.

Megjegyzés. 1. Meg lehet mutatni, hogy a találtakon kívül nincs más megoldás, például a $4 = 3 + 1$ helyettesítéssel és a binomiális tétel felhasználásával adódik, hogy

$$3|x, \quad \text{illetve} \quad 3|(y - 1).$$

Pálfalvi György (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)

2. Más megmutatása ennek, ha az I. megoldás eljárásában a $4^{10} + 4^{16}$, ill. a $4^{16} + 4^{21}$ összeget bontjuk *minden* lehető módon két tényező szorzatára. Az $x < 10$ és $y < 16$ esetek hosszú sikertelenségi sorozatát csak 1 – 1 sikeres eset szakítja meg: $x = 3$, ill. $y = 10$, emiatt mellőztük őket.

III. megoldás. a) Ha valamely x mellett K_1 négyzetszám, mondjuk $K_1 = N^2$, akkor erre az x -re

$$4^{10} + 4^{16} = N^2 - 4^x = (N - 2^x)(N + 2^x) = M(M + 2^{x+1}),$$

ahol $M = N - 2^x$. Eszerint $(4^{10} + 4^{16})$ előállítható egy M egész és egy M -nél 2 valamely alkalmas hatványával nagyobb szám szorzataként. Biztosan ilyen előállítást kapunk, ha M -nek 4^{10} , vagy 4^{16} négyzetgyökét választjuk:

$$\begin{array}{lll} M = 4^5 & \text{mellett} & 4^{10} + 4^{16} = 4^5(4^5 + 4^{11}), \quad \text{és} \quad x = 21 \\ M = 4^8 & \text{mellett} & 4^{10} + 4^{16} = 4^8(4^2 + 4^{12}), \quad \text{és} \quad x = 3 \end{array}$$

b) Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\begin{array}{lll} M = 4^8 & \text{mellett} & 4^{16} + 4^{21} = 4^8(4^8 + 4^{13}), \quad \text{és} \quad y = 25 \\ M = 2^{21} & \text{mellett} & 4^{16} + 4^{21} = 2^{21}(2^{11} + 2^{22}), \quad \text{és} \quad y = 10 \end{array}$$