$$1+\sin^2 cx=\cos x. \tag{1}$$

Látjuk, hogy az $x=0$ szám tetszőleges c-re megoldása az egyenletnek. A feladat tehát azt megállapítani, hogy mely c értékekre nincs az egyenletnek 0-tól különböző megoldása.

Mivel $\sin^2 cx$ biztosan nemnegatív és $\cos x$ maximális értéke 1, azért (1) csak abban az esetben teljesülhet, ha

$$\sin^2 cx=0 \quad \text{és} \quad \cos x=1$$

egyszerre fennáll, vagyis

$$cx=k\pi, \quad \text{ahol} \quad k \quad \text{egész szám} \tag{2}$$

$$x=2m\pi, \quad \text{ahol} \quad m \quad \text{egész szám.} \tag{3}$$

Amennyiben van az egyenletnek 0-tól különböző megoldása, akkor (3) szerint $m\neq 0$, és (3)-at (2)-be téve kapjuk, hogy

$$c=\frac{k}{2m}, \tag{4}$$

azaz c racionális szám.

Ha viszont c racionális szám, akkor az egyenletnek van nem nulla megoldása is: ha $c=\frac{p}{q}$, akkor $x=2q\pi$ kielégíti az egyenletet ($q\neq 0$, hiszen c nevezőjében szerepel):

$$1+\sin^2\left(\frac{p}{q}2q\pi\right)=1+\sin^2(2p\pi)=1=\cos(2q\pi).$$

Így azt kaptuk, hogy az (1) egyenletnek akkor és csak akkor van nullától különböző megoldása, ha c racionális szám. Ebből következik, hogy egyetlen megoldás pontosan akkor van, ha c irracionális.

Horváth Mária (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., IV. o. t.)