

**I. megoldás.** Mivel  $a, b, c$  pozitív számok, így  $a+b+c > 0$ , tehát szorozva az állítás mindkét oldalát  $(a+b+c)$ -vel, az egyenlőtlenség iránya nem változik meg:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c) = a^2bc + b^2ac + c^2ab,$$

átrendezve

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0.$$

Amennyiben sikerül megmutatnunk, hogy ez az egyenlőtlenség minden  $a, b, c$  valós számra fennáll, úgy készen vagyunk.

Ámde a bal oldal így alakítható:

$$\begin{aligned} & 4a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2bc - 4ab^2c - 4abc^2 = \\ &= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + (c^4 - 2c^2a^2 + a^4) + \\ &+ (2a^4 - 4a^2bc + 2b^2c^2) + (2b^4 - 4b^2ca + 2c^2a^2) + (2c^4 - 4c^2ab + 2a^2b^2) = \\ &= (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2(a^2 - bc)^2 + 2(b^2 - ca)^2 + 2(c^2 - ab)^2. \end{aligned}$$

Így valóban igaz az egyenlőtlenség. Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha  $a^2 = b^2 = c^2$ , azaz  $a, b, c$  pozitivitásából, ha  $a = b = c$ . Ekkor tényleg egyenlőség áll fenn.

**II. megoldás.** Ismeretes, hogy pozitív számok esetében igaz a következő két egyenlőtlenség:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc, \\ (2) \quad & \left( \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \right) \geq \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

A (2)-t az  $a^2, b^2, c^2$  pozitív számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^2.$$

Ezt (2) négyzetével összevetve láthatjuk, hogy

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^4 = \left( \frac{a+b+c}{3} \right) \cdot \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3.$$

Alkalmazva az (1) egyenlőtlenséget, majd a pozitív  $(a+b+c)/3$  mennyiséggel átosztva, a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Mivel (1)-ben, illetve (2)-ben egyenlőség csak az  $a = b = c$  esetben lehetséges, így egyenlőség itt is csak  $a = b = c$  esetén lehet.

*Megjegyzés.* Az I. megoldás az  $a, b, c$  számokról mindössze annyit használt ki, hogy  $a+b+c > 0$ . Amennyiben ez teljesül, úgy az egyenlőtlenség is áll. Ha csak annyit kötünk ki, hogy  $a+b+c > 0$  legyen, akkor is szükséges az egyenlőséghez, hogy  $a = b = c$  legyen, amit az I. megoldás végén levő gondolatmenet átalakításával kaphatunk meg.

<sup>1</sup>Lásd pl. az Iskolai Függvénytáblázat 242. 61. képletét.