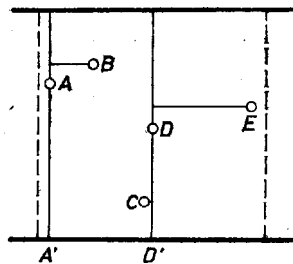
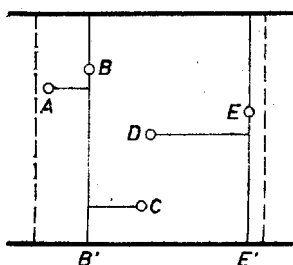


Mondjuk azt, hogy a vizsgált terep rajzát úgy helyeztük magunk elé, hogy azon az autópályák közül az egyik fent van, a másik lent, és legyen az öt állomás balról jobbra haladva A, B, C, D, E . Három útrendszert tervezünk. Az elsőben A -n és D -n át vezetünk egy-egy függőleges 10 km-es utat, és B -ből az elsőig, C -ből, E -ből a másodikig vezetünk vízszintes útszakaszokat (1. ábra).



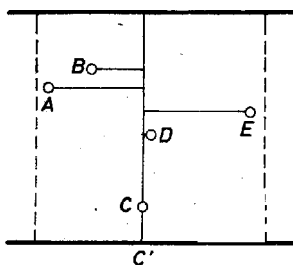
1. ábra

A másodikban B -n és E -n át futnak a függőleges utak, és A -t, C -t az elsőhöz, D -t a másodikhoz kötjük vízszintes utakkal (2. ábra).



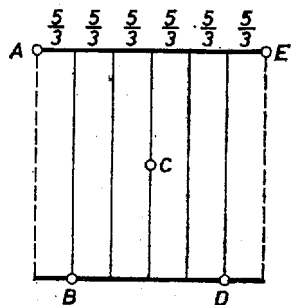
2. ábra

A harmadikban csak egy függőleges út van, a C -n átmenő, ehhez kötjük a többi pontot vízszintes utakkal.



3. ábra

A három úrendszerben együtt öt függőleges út van, ezek együttes hossza 50 km. Vetítsük le az alsó autópályára a pontokat, és jelöljük a vetületeket A' -vel, B' -vel, C' -vel, D' -vel és E' -vel (egybeesés természetesen lehetséges). A három úrendszer egyesítéséből kapott úthálózatban az $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, szakaszok mindegyike felett három-három vízszintes út halad, a vízszintes utak összhossza tehát egyenlő az $A'E'$ szakasz hosszának a háromszorosával, ami legfeljebb 30 km. A három úrendszer összhossza ezek szerint legfeljebb 80 km, így közülük a legrövidebbik legfeljebb $26\frac{2}{3}$ km. Ekkora összáthossz tehát mindig elegendő.



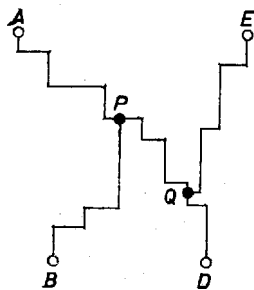
4. ábra

Megmutatjuk, hogy a 4. ábra elrendezése mellett szükség is van $26\frac{2}{3}$ km-es úthálózatra. Tetszőleges úthálózat alapján csoportosítsuk a pontokat úgy, hogy egy-egy csoportba olyan pontok kerüljenek, amelyek közül bármelyikből bármelyikbe eljuthatunk kerékpáron.

Ha így legalább három csoportot kapunk, az összhossz legalább 30 km, hiszen mindegyik csoporthoz legalább 10 km hosszú út tartozik, és ezeknek nincs közös darabja.

Ha két csoport van, az úthálózathoz tartozó függőleges útdarabok összhossza legalább 20 km. A vízszintes útdarabok összege pedig legalább a csoportok pontjainak a vetületei között fellépő legnagyobb távolságok összegével egyenlő. Ha a (nagyobb) csoportban 4 pont van, ez legalább annyi, mint $A'D'$, ami $8\frac{1}{3}$ km, ha 3, akkor ez legalább $A'B' + C'E = 6\frac{2}{3}$ km. Az összhossz mindkét esetben legalább $26\frac{2}{3}$ km.

Az olyan úthálózatokban, amelyekben a pontok egy csoportot alkotnak, tekintsük az A -ból D -be és B -ből E -be vivő utakat (vagy ha több ilyen van, ezek egyikét). Ezek szükségszerűen keresztezik egymást, jelöljük P -vel azt a pontot, ahol A -ból D felé haladva először érjük el a BE utat, és jelöljük Q -val azt a pontot, ahol azt végleg elhagyjuk. Ha B -ből E -be menve előbb P -be jutunk, akkor az APB , DQE útdaraboknak nincs közös pontja, tehát függőleges darabjaik összhossza legalább 20 km, amihez legalább AE -nyi vízszintes darabok csatlakoznak, és az együtt legalább 30 km (5. ábra).



5. ábra

Ha P és Q azonos, vagy P a Q után van a BE úton, akkor az APE , BQD utaknak nincs közös vízszintes darabjuk, tehát az útszisztem vízszintes darabjainak az összhossza legalább $AE + BD = 16\frac{2}{3}$ km, ami a függőleges darabok legalább 10 kilométernyi összhosszával együtt legalább $26\frac{2}{3}$ km.

Megjegyzés. A feladat az 1972. évi Kürschák-verseny egyik feladatának az általánosításával kapcsolatos. Ennek megfelelően a feladat kitűzésekor a szerkesztőség utalt a következő cikkekre: *Surányi János*: Az 1972. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása, K.M.L. 46 (1973) 49–57. old., élesebben 53–57. oldal.

A fenti megoldás a Kürschák-verseny feladatának idézett egyik megoldásából úgy származtatható, hogy az eredeti megoldás minden olyan meg gondolását, amely kihasználja, hogy éppen 4 megfigyelőállomás van, egy olyan meg gondolással helyettesítettük, amelyik a kívánt eredményt 5 állomás esetére biztosítja. Tanulságos lehet a két megoldás összehasonlítása ebből a szempontból.