

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{5} (2a_n^3 - a_n^2 + 3a_n + 1).$$

1. Megmutatjuk, hogy a sorozat fölülről korlátos és szigorúan monoton növekvő. Ebből már következik, hogy a sorozatnak van határértéke.¹

a) A sorozat felülről korlátos, egy felső korlátja $1/2$. Ugyanis

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 < \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{1}{5} < \frac{1}{2}, \\ a_3 &= \frac{1}{5} \left(2 \cdot \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^2} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{5^2} \left(\frac{2}{5} - 1 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} - 1 \right) \right\} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

hiszen a kapcsos zárójelben álló kifejezés mindkét tagja negatív. És hasonlóan, ha valamely n indexre $a_n < \frac{1}{2}$, akkor ez a nagyságviszony öröklődik a következő elemre:

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n^3 - a_n^2 + 3a_n + 1) = \frac{1}{5} \left\{ a_n^2(2a_n - 1) + \frac{3}{2}(2a_n - 1) \right\} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} < \frac{1}{2},$$

hiszen a kapcsos zárójelben a negatív $(2a_n - 1)$ kifejezést pozitív számokkal szoroztuk, majd összeadtuk. Ezzel első állításunkat bizonyítottuk.

b) A vizsgált számsorozat szigorúan monoton növekedő. Ehhez azt kell belátnunk, hogy

$$a_{n+1} - a_n > 0.$$

Itt a_{n+1} helyébe (1)-et téve, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{5}(2a_n^3 - a_n^2 + 3a_n + 1) - a_n = \frac{1}{5}(2a_n - 1)(a_n^2 - 1),$$

és ez pozitív, hiszen már tudjuk, hogy $a_n < 1/2$, így a szorzat mindkét tényezője negatív.

2. Eredményeink szerint (1) bal oldalának határértékét A -val jelölve, jobb oldalának határértéke $(2A^3 - A^2 + 3A + 1)/5$, tehát

$$A = \frac{1}{5}(2A^3 - A^2 + 3A + 1).$$

Ezt 0-ra redukálva, a bal oldal tényezőkre bontható:

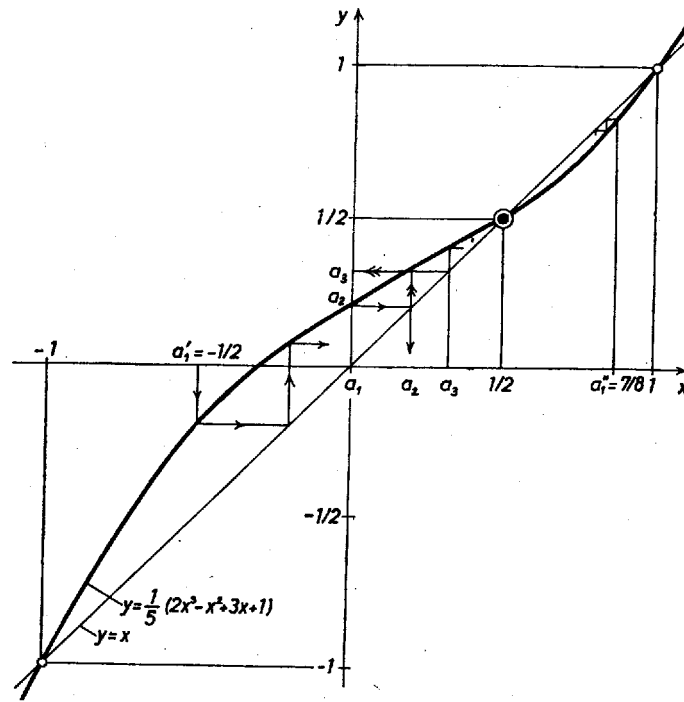
$$(A - 1)(A + 1)(2A - 1) = 0,$$

így A értéke csak $+1$, -1 és $1/2$ valamelyike lehet. És mivel a sorozat minden tagja – mint láttuk – 0 és $1/2$ közé esik, azért csak $A = 1/2$ lehet.

Kun Andrea (Szolnok, Verseggy F. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. Ábránk az $y = (2x^3 - x^2 + 3x + 1)/5$ függvénygörbét mutatja be a $(-1; 1)$ intervallumban, erről látjuk, hogy sorozatunk egymás utáni tagjai közelednek $(1/2)$ -hez.

¹Lásd az 1869. feladathoz fűzött megjegyzéseket, K. M. L. 47 (1973) 130. oldal.



Az $y = x$ egyenes szerepe az, hogy a_2 -nek az y tengelyen leolvasott értékét az egytollú nyilak mentén „átvisszük” az x tengelyre, ebből mint abszcisszából olvassuk le a_3 értékét (két tollú nyilak), és így tovább. Ez később már úgy „egyszerűsödik”, hogy csak a görbe és az egyenes között lépegetünk a tengelyekkel párhuzamosan (a jelentését azonban nem szabad elfelejteni!).

Hasonlóan látható, hogy ugyanerre az eredményre jutunk a_1 helyett bármely olyan a_1' -ből indulva, amelyre $-1 < a_1' < 1$. Ha $a_1' = -1$ vagy $a_1' = 1$, akkor a sorozat minden tagja -1 , illetve $+1$, ha pedig $|a_1'| > 1$, akkor divergens sorozatot kapunk.