

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \frac{m}{k+m},$$

Jelöljük az összeget $S(m, n)$ -nel. (Egyébként az összegezést az m paraméter nem érinti.) Az $n = 1$ és $n = 2$ esetben, határozatlan m mellett

$$\begin{aligned} S(m, 1) &= \binom{0}{0} \binom{2}{1} \frac{m}{m} + \binom{2}{1} \binom{0}{0} \frac{m}{1+m} = \frac{2(2m+1)}{m+1}, \\ S(m, 2) &= \binom{4}{2} + \binom{2}{1}^2 \frac{m}{1+m} + \binom{4}{2} \frac{m}{2+m} = \frac{16m^2 + 32m + 12}{(m+1)(m+2)} = \\ &= \frac{4(2m+1)(2m+3)}{(m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

Az $n = 3$ és $n = 4$ esetekben adódó hasonló kifejezések láttán az a sejtésünk alakul ki, hogy minden n természetes szám esetén $S(m, n)$ a következő kifejezéssel egyenlő:

$$(2) \quad \frac{2^n(2m+1)(2m+3) \cdot \dots \cdot (2m+2n-1)}{(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+n)}$$

ezt fogjuk bizonyítani.

Az $n = 1$ és $n = 2$ esetekben $S(m, n)$ kapott kifejezése nem egyszerűsíthető az m -et tartalmazó tényezővel, tehát $S(m, n)$ általában nem egyszerűsíthető. Másrészt (2) nevezője éppen az (1) tagjaiban szereplő n db nevező szorzata, és így alkalmas a tagok közös nevezőjének szerepére. (Más nevező nem léphet föl, ugyanis az (1)-ben szereplő binomiális együtthatók egész számok, úgyszintén a $k = 0$ indexű tagnak $\frac{m}{k+m} = 1$ tényezője is.) Ha tehát a sejtett azonosságot a (2)-beli

$$N(m) = (m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+n)$$

nevezővel, az m határozatlannak n -edfokú polinomjával megszorozzuk:

$$\begin{aligned} N(m) \cdot S(m, n) &= m \cdot N(m) \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{k+m} = \\ &= 2^n(2m+1)(2m+3) \cdot \dots \cdot (2m+2n-1), \end{aligned}$$

a bal oldalnak mind az $(n+1)$ tagja n -edfokú polinomja az m -nek, így $F(m)$ összegük is, mert az m^n hatvány együtthatója minden tagban pozitív. Ugyancsak n -edfokú polinom a (3)-nak $G(m)$ jobb oldala is.

Két egyező fokszámú (egyváltozós) polinom akkor és csak akkor azonos, ha értékük 1-gyel több (különböző) helyen megegyezik, mint a fokszámuk. A bizonyításhoz megkívánt $(n+1)$ helyet természetesen tetszőlegesen választhatjuk, legyenek ezek $0, -1, -2, \dots, -n$, vagyis a k szummációs betű (1)-ben előírt értékeinek (-1) -szeresei.

Így minden egyes $m = -k$ esetben $F(m) = F(-k)$ egyetlen tagból áll, mert az

$$\frac{m \cdot N(m)}{k+m} \cdot \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

tag kivételével a további n tag mindegyikében megmarad a $k+m=0$ tényező. A megmaradó tag pedig így alakul:

$$F(-k) = (-k)(-k+1) \cdot \dots \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (-k+n) \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k},$$

megjegyezve, hogy ez az írásmód csak azt jelenti, hogy a $(-k)$ -től kezdve egyesével növekedően következő $(n+1)$ tényező közül kimarad a 0; elől k számú negatív tényező áll – speciálisan $m = k = 0$ esetén nincs negatív tényező –, utána pedig $(n-k)$ számú pozitív tényező – speciálisan $m = -n$, azaz $k = n$ esetén nincs pozitív tényező.

Eszerint a binomiális együtthatók előtt álló n db tényező a (-1) tényezők kiemelésével két faktoriálisba foglalható össze, illetve $m = 0$ és $m = -n$ esetén egybe. A binomiális együtthatók is kifejezhetők faktoriálisokkal, ezért

$$F(-k) = (-1)^k k!(n-k)! \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{(n-k)! \cdot (n-k)!}.$$

A számlálót tovább alakítjuk a $(2r)!$ páros és páratlan tényezőinek különválasztásával adódó

$$\begin{aligned} (2r)! &= (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2r) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1)) = \\ &= 2^r \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1)), \\ \frac{(2r)!}{r!} &= 2^r \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2r-1) \end{aligned}$$

azonosság felhasználásával:

$$F(-k) = (-1)^k \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1),$$

ismét megjegyezve, hogy a 2^n tényező után először k számú, majd $(n-k)$ számú tényező áll 1-től 2-esével növekedve – és ez érvényes $k=0$ és $k=n$ esetén is.

Ha itt a $(-1)^k$ tényezővel, azaz k számú (-1) -es tényezővel beszorzunk a mondott első k számú tényezőbe, és ezek sorrendjét megfordítjuk, akkor

$$F(-k) = 2^n(-2k+1)(-2k+3) \cdot \dots \cdot (-3)(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1),$$

ez pedig éppen a $G(m)$ értéke az $m = -k$ helyen [lásd (3) jobb oldalát].

Ezzel a sejtett azonosságot bebizonyítottuk, (1)-nek szumma jelet nem tartalmazó alakja a (2), a feladatot megoldottuk.

Veres Sándor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., M. o. t.)

Megjegyzések: 1. Nem lényeges a feladat szövegének ez a korlátozása: m természetes szám, az $F(m) = G(m)$ azonosságot minden valós m -re igazoltuk a speciális értékek felhasználásával. Ugyanígy (1) és (2) egyenlősége is fennáll minden olyan helyen, ahol értelmezve vannak.

2. A feladat tulajdonképpen az (1) összegnek szorzattá alakítása volt, arra gondolva, hogy szorzatok általában kényelmesebben számíthatók vagy kezelhetők tovább, mint összegek, különösen szorzatok összegei. De ha a $\sum$ jel példájára az „és így tovább”-nak „...” jelét sem engedjük meg, látszólag eltüntethetjük ezeket (2)-ből, faktoriálisok, binomiális együtthatók bevezetésével. m -en ismét természetes számot értve, a nevező mindjárt így írható:

$$N(m) = \frac{(m+n)!}{m!}.$$

És ha (2)-t a nevezőjével bővítjük, majd a számláló n db új tényezőjének mindegyikét 2-vel szorozzuk és így beiktatjuk két-két eddigi tényező közé, akkor ezt is írhatjuk két faktoriális hányadosaként, majd az egész kifejezést két binom együttható hányadosaként:

$$\begin{aligned} \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3) \cdot \dots \cdot (2m+2n-1)(2m+2n)}{(N(m))^2} &= \\ &= \frac{(2m+2n)!m!m!}{(2m)!(m+n)!(m+n)!} = \frac{\binom{2m+2n}{m+n}}{\binom{2m}{m}}. \end{aligned}$$

Az „és így tovább” a faktoriálisban rejtve van jelen.

Veres Sándor