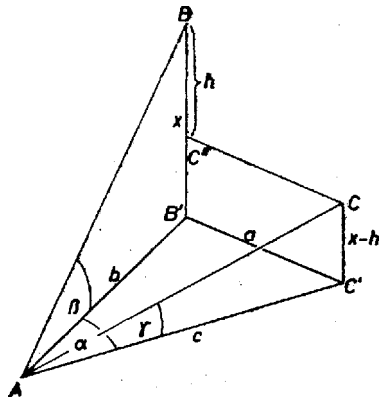
Jelöljük a keresett AB', AC' távolságokat rendre b-vel, ill. c-vel, a BB' magasságkülönbséget x-szel, továbbá az adatokat: $B'C' = a$-val, $BC'', = h$-val (ahol C'' a C vetülete BB'-re), $B'AB\sphericalangle = \beta$-val, $C'AC\sphericalangle = \gamma$-val, $B'AC'\sphericalangle = \alpha$-val.



1. ábra

x-szel és β-val kifejezhetjük b-t, másrészt az A és C közti CC' magasságkülönbség és γ alapján c-t. Ezeket az $AB'C'$ háromszög $B'C'$ oldalának a cosinustétel adta kifejezésébe helyettesítve, egyismeretlenes egyenletet kapunk x-re:

$$b = x \operatorname{ctg} \beta, \quad c = (x-h) \operatorname{ctg} \gamma, \tag{1}$$

$$x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + (x-h)^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma - 2x(x-h) \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma \cos \alpha = a^2,$$

$$x^2(\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma - 2 \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma \cos \alpha) -$$

$$-2xh \operatorname{ctg} \gamma (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta \cos \alpha) + (h^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma - a^2) = 0.$$

Számadataink közül előbb az egyszerű $2 \cos \alpha = 1$ és $a = 3h$ kapcsolatokat használjuk föl és egyenletünket átalakítjuk az $x/h = \xi$ arányra mint ismeretlenre, majd a β, γ szögek adatait is behelyettesítjük:

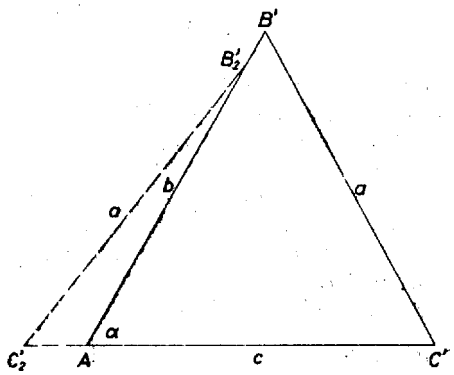
$$\xi^2(\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma - \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma) - \xi(2 \operatorname{ctg}^2 \gamma - \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma) + (\operatorname{ctg}^2 \gamma - 9) = 0,$$

$$789{,}9\xi^2 - 1561{,}4\xi + 811{,}0 = 0,$$

$$\xi^2 - 2{,}085\xi + 1{,}083 = 0,$$

$$\xi = 1{,}0424 \pm 0{,}0612.$$

A feladat szerint $x > h$, ezért $\xi > 1$, és csak a nagyobbik gyök fogadható el: $\xi = 1{,}104$, egyértelműen $x = 883\,m$, ebből pedig (1) alapján AB-nek és AC-nek a térképen látható vetülete 2426 m, ill. 2374 m. (Lásd 2. ábra; a pontozott vonal $\xi = 0{,}981$ érték alapján az ellentétes irányban adódó, el nem fogadható C_2' helyzetre mutatja, hogy teljesül $B_2'C_2' = a$. Nem árt ugyanis gondolni a kizárt gyök esetleges értelmezésére.)



2. ábra

Megjegyzés. A feladatot egy mérnöki kérdésből alakította ki a szerkesztőség a számadatok kerekítésével.[1] – Potenoth-szerkesztésen (másképpen Snellius – Potenoth-feladaton) a hátrametszést szokás érteni.[2] A szokásos három alappont helyett itt négy szerepel: B, B', C' és C, és két szög helyett hármat mérünk meg a meghatározandó A álláspontban, kettőt függőleges, egyet a vízszintes síkban.

Az idézett cikk a B', C' pontoknál levő szög sinusára ír föl egymástól függetlenül másodfokú egyenleteket – vagyis lényegében az AB', AC' távolságokra –, majd a gyökök kiszámítását az akkori legfontosabb számítási segédeszköz, a logaritmustáblázat könnyebb alkalmazása céljára – segédszögek bevezetésével hajtja végre.

[1] *Gyöngyössy Zoltán*: A „térbeli Potenoth". Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közlönye, 1914. évi 27. szám.
[2] Lásd ide az 1419. és 1424. gyakorlatokat is, K. M. L. 44 (1972) 172. és 220. old.