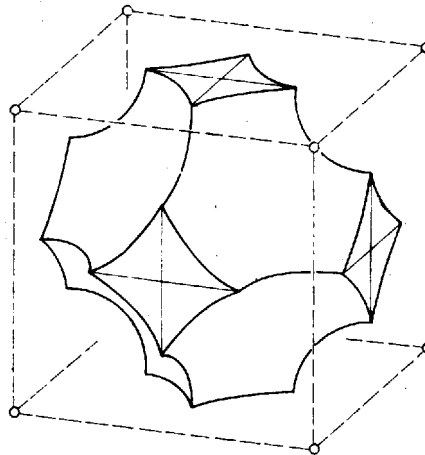


Az elsőnek vett, kockacsúcs körüli gömb akkora térfogatú részt mar ki a kockából, mint a maga térfogatának $1/8$ része, egyrészt mert a csúcson átmenő kockalapsíkok mindegyike megfelezi a gömböt, a 3 sík együtt pedig $2^3 = 8$ egybevágó részre osztja, másrészt mert a gömb sugara kisebb a kocka élénél.



1. ábra

Második gömbünk középpontjának az előbbivel szomszédos 3 csúcs valamelyikét véve, ez a gömb már belenyúlik az elsőbe, mert sugaraik $2r$ összege nagyobb a kocka élénél, hiszen $\sqrt{5}/2 > 1$. E két gömb közös része lencse alakú test, és ennek $1/4$ része tartozik bele a kockába, mert az élt alkotó két lapsík a teret 4 egybevágó lapszögtartományra osztja.

A kocka két távolabbi csúcsa (egy lapbeli, ill. térbeli átló végpontjai) körüli gömbök nem nyúlnak egymásba, mert $2r$ kisebb már az $a\sqrt{2}$ lapbeli átlónál is.

Eszerint ha a kocka térfogatából elvesszük a nyolcadgömb térfogatának 8-szorosát, akkor mind a 12 élnél levő lencsenegyed térfogatát 2-szer vontuk le, ezért 1-szer vissza kell adnunk. Együttes térfogatuk egyenlő 3 egész lencse térfogatával, azaz 6 fél lencse térfogatával, megjegyezve, hogy fél lencsén itt már azt a gömbszeletet értjük, amely a lencséből a gömbközpontok közti él felező merőleges síkjának egyik-egyik oldalára esik, vagyis amit ez a sík metsz le egy gömbünkben.

A szelet magassága

$$m = (r - a/2) = a(\sqrt{5} - 2)/4,$$

így térfogata az ismert képlet ¹ szerint

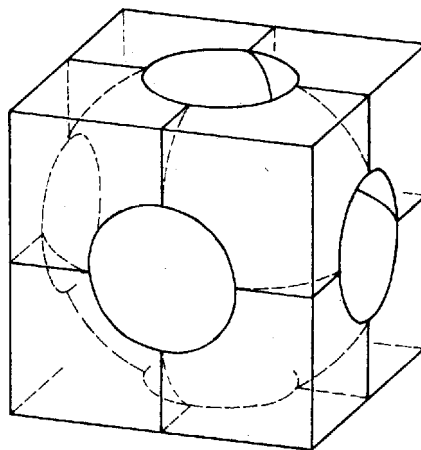
$$V_{sz} = \frac{\pi}{3}m^2(3r - m) = \frac{\pi a^3}{96}(5\sqrt{5} - 11),$$

tehát a maradéktest térfogata

$$V_m = a^3 - \frac{4\pi}{3}r^3 + 6V_{sz} = a^3 \left(1 - \frac{\pi}{48}(33 - 10\sqrt{5})\right) = a^3 \cdot 0,304.$$

Megjegyzés. Vázoljuk egy másik megoldás gondolatmenetét. Vágjuk ketté a kockát és a maradéktestet a kockának az élekre merőleges felezősíkjaival. A 3 ilyen szimmetriasík $2^3 = 8$ részre darabolja a kockát és a maradéktestet, mindegyik kiskocka tartalmazza az eredeti kocka egy csúcsát, a maradéktest részei egybevágók és mindegyiknek a határfelületében csak egy gömbnek szerepel felületi része. Toljuk át a kocka mindegyik testátlójával átjárt két-két részt egymás helyére. Így a kocka eredeti 8 csúcsa az eredeti kockaközéppont helyére jut, és a maradéktestet határoló gömbfelületi részek egyetlen gömb felületének részeivé állnak össze (2. ábra).

¹ Az iskolai függvénytáblázatok 344.2. számú képlete.



2. ábra

Másrészt a 8 résznek az eredeti kockaközéppontban keletkezett csúcsai kitolódnak az eredeti kockacsúcsok helyére. Kockát látunk tehát, ennek a belseje hiányzik, és lapjain $a/4$ sugarú kör alakú lyukak adódtak. A gömbből 6 gömbszelet esik az új kocka lapjain túlra (a fentebbi fél-lencsék), ezekben a „gömbi marógép” nem talál anyagot, tehát az eltávolított anyag térfogata $V_{\text{gömb}} - 6V_{\text{szelet}}$, a maradéktesté pedig $V_{\text{kocka}} - V_{\text{gömb}} + 6V_{\text{szelet}}$.