

I. megoldás. Jelöljük a befizető felnőttek, gyerekek, katonák számát rendre x , y , z betűvel, ekkor a következő egyenlet nem negatív egész számokban való megoldásainak $s(n)$ számát keressük:

$$(1) \quad 4x + y + z = n.$$

Gondoljuk, hogy osztályokba rendezzük a megoldásokat x lehetséges értékei:

$$x = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

szerint, ahol a szögletes zárójellel a benne álló szám egész részét jelöljük, vagyis a zárójelbeli számnál nem nagyobb egészek legnagyobbikát. Az egymás utáni osztályokbeli megoldásokban a további két ismeretlen összege:

$$y + z = n, n - 4, n - 8, \dots, n - 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Általában az $y + z = k$ egyenlet (k nem negatív egész) előírt megoldásainak száma $k + 1$, hiszen y rendre fölveszi a $0, 1, 2, \dots, k$ értéket, z pedig az ezt k -ra kiegészítő szám, ezért az egymás utáni osztályok (1)-nek rendre

$$(2) \quad n + 1, n - 3, n - 7, \dots, n + 1 - 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

megoldását tartalmazzák, és ezek összege a válasz a feladat kérdésére. A (2) számok számtani sorozatot alkotnak, számuk $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$, a különbség (-4) , így összegük:

$$s(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 \right) \left(n + 1 - 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Eredményünket előbb szétbontva, majd máshogyan egységesítve kezelhetőbbé alakítjuk. Aszerint, hogy

$$n = 4i, \quad 4i + 1, \quad 4i + 2, \quad 4i + 3, \\ s(n) = 2i^2 + 3i + 1, \quad 2i^2 + 4i + 2, \quad 2i^2 + 5i + 3, \quad 2i^2 + 6i + 4.$$

És mivel – fordítva – esetenként rendre

$$i = \frac{n}{4}, \quad \frac{n-1}{4}, \quad \frac{n-2}{4}, \quad \frac{n-3}{4}, \\ 8s(n) = n^2 + 6n + 8, \quad n^2 + 6n + 9, \quad n^2 + 6n + 8, \quad n^2 + 6n + 5,$$

azért látjuk, hogy mindegyik esetben helyes a következő:

$$s(n) = \left\lfloor \frac{n^2 + 6n + 9}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+3)^2}{8} \right\rfloor.$$

Még másképpen: $s(n)$ az

$$\frac{n^2 + 6n + 8}{8} = \frac{(n+2)(n+4)}{8}$$

számhoz legközelebbi egész szám (vagyis a tört egészre kerekített értéke).

II. megoldás. A kitűzéskor ajánlott forrásban ¹ látott feladathoz képest itt csupán az az eltérés, hogy katonák belépő díja 2 Ft helyett 1 Ft. Az ottani megoldás gondolatmenetét alkalmazva, $s(n)$ egyenlő a

$$(3) \quad P(x) = (1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{4k} + \dots)(1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots)^2$$

végtelen polinomban x^n együtthatójával. Tovább is az idézett megoldás szerint haladva elemi (parciális) törtekre bontjuk (3)-nak zárt

$$\frac{1}{(1-x^4)(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x^2)}$$

alakját, azaz meghatározzuk $P(x)$ várt típusú

$$(4) \quad P(x) = \frac{a_1}{1+x} + \frac{a_2}{(1-x)^2} + \frac{a_3}{(1-x)^3} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x^2}$$

¹ *Surányi János*: Polinomok és végtelen polinomok II. rész, K. M. L. 45 (1972) 193–203. o., éleesebben: 200–203. o.

felbontásának a_1, a_2, a_3, b, c, d együtthatóit úgy, hogy (4) azonosság legyen. (Tulajdonképpen itt kezdődik munkánk önálló része, amihez nem volt minta.)

A törteket a szokott módon eltávolítjuk:

$$(5) \quad 1 = a_1(1-x)^2(1+x)(1+x^2) + a_2(1-x)(1+x)(1+x^2) + a_3(1+x)(1+x^2) + b(1-x)^3(1+x^2) + (cx+d)(1-x)^3(1+x),$$

eszerint a jobb oldalon az x -től mentes tagnak (azaz x^0 együtthatójának) 1-nek kell lennie és x minden előforduló hatványának együtthatója 0. A beszorzás után x^5, x^4, x^3, x^2 és x lépne fel, így a 6 ismeretlen együttható számára éppen 6 egyenletet kapnánk az együtthatók összehasonlításából. Ezek közül mégis csak 3-at írnunk fel: x^5, x^4 és x^0 együtthatói alapján:

$$(6) \quad 0 = a_1 - b - c,$$

$$(7) \quad 0 = -a_1 - a_2 + 3b + 2c - d,$$

$$(8) \quad 1 = a_1 + a_2 + a_3 + b + d.$$

Az első kettő még könnyen megállapítható – a teljes kifejtés nélkül is, a harmadikhoz pedig elég $x = 0$ -t helyettesíteni (5) két oldalába. Ez adja azt a gondolatot, hogy más-más x értéket választva, tetszés szerinti számú egyenlőséget kapunk (5)-ből és lehet köztük egyszerűbb is. Legkönnyebb $x = 1$ és $x = -1$ helyettesítése, mert így több tényező 0 lesz.

$$(9') \quad 1 = 4a_3,$$

$$(9'') \quad 1 = 16b,$$

legyen végül $x = 2$, így

$$(10) \quad 1 = 15a_1 - 15a_2 + 15a_3 - 5b - 6c - 3d.$$

Összeadva (8)-at és (7)-et, a (9') és (9'') figyelembevételével, majd (6)-ból:

$$a_3 = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{16}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{5}{16}.$$

Ezekkel (7)-ből és (10)-ből

$$a_2 + d = \frac{3}{8}, \quad 5a_2 + d = \frac{15}{8},$$

amiből

$$a_2 = \frac{3}{8}, \quad d = 0,$$

és (4) így alakult:

$$P(x) = \frac{1}{16} \left\{ \frac{5}{1-x} + \frac{6}{(1-x)^2} + \frac{4}{(1-x)^3} + \frac{1}{1+x} + \frac{4x}{1+x^2} \right\}.$$

Visszatérve a végtelen polinom alakokra, a cikk első részében láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{5}{1-x} &= 5 + 5x + 5x^2 + \dots + 5x^k + \dots, \\ \frac{6}{(1-x)^2} &= 6 + 12x + 18x^2 + \dots + 6(k+1)x^k + \dots, \\ \frac{4}{(1-x)^3} &= 4 + 12x + 4 \binom{4}{2} x^2 + \dots + 4 \binom{k+2}{2} x^k + \dots, \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + \dots, \\ \frac{4x}{1+x^2} &= 4x - 4x^3 + 4x^5 - \dots + (-1)^m 4x^{2m+1} + \dots \end{aligned}$$

x^k együtthatója az első három sor összegében $5 + 6(k+1) + 2(k+2)(k+1) = 2k^2 + 12k + 15$.

És mivel az utolsó két sor együtthatói két-, ill. négy tagú szakaszossággal ismétlődnek: $\dots 1, -1, 1, -1, 1, \dots$, illetve $4, 0, -4, 0, 4, \dots$,

azért

$$s(n) + \frac{1}{16} \left\{ 2n^2 + 12n + 15 + (-1)^n + 4(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\}.$$

Megjegyzés. Ha csak a konkrét feladatot néznénk, nem lenne létjogosultsága a II. megoldásnak. Ebben viszont egy sok esetben használható elv alkalmazását gyakoroltuk. Emlékezzünk vissza: az egyenletfelállításra végzett első példák mind olyanok voltak, amilyeneket egyenlet nélkül is meg lehet oldani, sőt – az akkori tudás alapján – egyenlet nélkül gyorsabban lehet.